高さ関数の漸近挙動と力学系的 MORDELL-LANG 型の問題について

佐野　薫 (KAORU SANO)

1. Introduction

この原稿では $\overline{\mathbb{Q}}$ と書けば $\mathbb{Q}$ の代数閉包を表すことにする。X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された滑らかな射影的代数多様体とし、$f\colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された自己全射とする。このとき X の $\overline{\mathbb{Q}}$-有理点 $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ を f で繰り返し送ることで、数論的な複雑さである高さ（定義 2.3）の漸近挙動を調べるという問題が考えられる。これは例えばアーベル多様体の標準高さの定義にも本質的に関わっている問題であり、自己射と相性の良い関数を得るのに非常に有効である。

高さの漸近挙動に関して、今回次のような結果を得た。

定理 1.1 (主定理)**.** $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について、その算術次数が $\alpha_f(x) > 1$ を満たすとき、ある非負整数 $t_f(x)$ が存在して、$n \to \infty$ の時に

$$h_H(f^n(P)) \asymp n^{t_f(P)} \alpha_f(P)^n$$

を満たす。

2 節で記号と定義について詳しく述べる。Bell-Ghioca-Tucker によって提出された力学系的 Mordell-Lang 型の予想を 4 節で紹介し、主定理がこの問題に応用できることを 5 節で紹介する。

2. 記号と定義の準備

定義 2.1 (代数体のノルム)**.** K を代数体、すなわち $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする。このとき K の各元は $\mathbb{Q}$ 係数のモニック多項式の根となるが、特に $\mathbb{Z}$ 係数のモニック多項式の根であるようなもの全体の集合を $\mathcal{O}_K$ とする。すると $\mathcal{O}_K$ は単位元を持つ可換環になる。

$x \in K$ とする。

(1) 体の埋め込み $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$|x|_\sigma := |\sigma(x)|$$

とする。ここで右辺の $|\cdot|$ は複素数の通常の絶対値である。

(2) P を $\mathcal{O}_K$ の 0 でない素イデアルとする。このとき $x \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ について

$$e_P(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid x \in P^n\}$$

と置いて $|x|_P$ を

$$|x|_P := \#(\mathcal{O}_K/P)^{-e_P(x)}$$

で定める。一般に $x \in K$ のときは $x = a/b$ $(a, b \in \mathcal{O}_K)$ と表して

$$|x|_P = \frac{|a|_P}{|b|_P}$$

で定め、また $|0|_P := 0$ とする。

$M_K := \{\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}\} \cup \{P : \mathcal{O}_K\text{の零でない素イデアル}\}$ とする。

定義 2.2 (射影空間の高さ関数)**.** K が代数体のとき $x = [x_0 : x_1 : \cdots : x_N] \in \mathbb{P}^N(K)$ つまり各 i について $x_i \in K$ なる斉次座標が取れる点について、そのような斉次座標を固定し、x の対数的ナイーブ高さ $h_{nv}(x)$ を

$$h_{nv}(x) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \|x\|_v$$

で定める。ここで $\|x\|_v$ は

$$\|x\|_v := \max_{0 \le i \le N} \{|x_i|_v\}$$

で定まる量である。

定義 2.3. X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された滑らかな射影代数多様体とする。H を X 上の非常に豊富な因子とする。H に付随する埋め込み $\phi_{|H|}\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ を固定する。このとき $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ の H に付随する（Weil の対数的）高さを

$$h_H(x) := h_{nv}(\phi_{|H|}(x))$$

で定める。

注意 2.4. X を射影空間に埋め込んで X の点を射影空間の点だとみなして高さを定義するのだと思っても同じことであるから、もし因子に不慣れなのであればそう思っても差支えない。

注意 2.5. H に付随する高さ関数は埋め込みの固定の仕方に応じて変化してしまうが、そのずれは高々有界関数である。また射影空間の場合のナイーブ高さについても、自己同型で点を移してから高さを測ると一般には元の高さとずれるが、それもまた高々有界関数のずれである。

注意 2.6. 非常に豊富な因子に限らず一般の因子に対しても有界関数の差を除いて一意に高さ関数が定義できることが知られており、ピカール群 $\mathrm{Pic}(X)$ から $X(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の（有界関数の差を除いた）実数値関数全体の空間への準同型写像がある。この準同型写像は Weil の height machine と呼ばれる。

実際に主定理を証明するときには豊富な因子に対する高さだけではなく height machine（をさらに $\mathbb{C}$ 上に拡張したもの）が必要となるが、本原稿では詳しくは述べない。

定義 2.7. $f\colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された X 上の自己全射とする。X 上の（非常に）豊富な因子 H とそれに付随する高さ関数 h_H を固定す

る。また $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して $h_H^+(x) := \max\{1, h_H(x)\}$ とおく。このとき x の f に関する算術次数 $\alpha_f(x)$ を

$$\alpha_f(P) := \lim_{n\to\infty} h_H^+(f^n(P))^{1/n}.$$

で定める。

注意 2.8. より一般に f が支配的な自己有理写像の場合にも、x の f による軌道が定義できるときには算術次数は定義できるが、一般には極限が収束することはまだ知られていない。本原稿で扱うのは f が自己全射の場合だけであり、その場合には極限が収束することが知られている。([KS] を見よ。) また、算術次数が H や h_H の選び方に依らないこともわかる。

3. 主定理

定理 3.1. *記号は 2 節の通りとする。$x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について、その算術次数が $\alpha_f(x) > 1$ を満たすとき、ある非負整数 $t_f(x)$ が存在して、$n \to \infty$ の時に*

$$h_H(f^n(x)) \asymp n^{t_f(x)} \alpha_f(x)^n$$

を満たす。

4. 力学系的 Mordell-Lang(型)予想

予想 4.1 (力学系的 Mordell-Lang 予想, [GT, Conjecture 1.7])**.** X を準射影的な複素代数多様体とする。$f\colon X \longrightarrow X$ を X の $\mathbb{C}$ 上の自己射とする。このとき $\mathbb{C}$ 有理点 $x \in X(\mathbb{C})$ と閉部分多様体 $Y \subset X$ について、集合

$$S_f(x, Y) := \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^n(x) \in Y(\mathbb{C})\}$$

はある非負整数 a_i, b_i によって

$$\{a_i + b_i\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

と表せる集合の有限和である。

定理 4.2 ([BGT1, Theorem 1.3])**.** *もし $f\colon X \longrightarrow X$ がエタール射であれば予想 4.1 は正しい。*

さらに [BGT2, Question 5.11.0.4] において次の予想が提出された。

予想 4.3 (力学系的 Mordell-Lang 型予想, [BGT2, Question 5.11.0.4])**.** X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された射影多様体、H を X 上の豊富な $\mathbb{R}$-因子とする。$f, g\colon X \longrightarrow X$ がともに X の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されたエタール射であって、ある実数 $\delta_f, \delta_g > 1$ について $f^*H \equiv \delta_f H$ 及び $g^*H \equiv \delta_g H$ が $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ の元として成り立っていると仮定する。このとき任意の 2 点 $x, y \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について、集合

$$S_{f,g}(x, y) := \{(m, n) \mid f^m(x) = g^n(y)\}$$

は、ある非負整数 $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて

$$\{(a_i + b_i\ell, c_i + d_i\ell) \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

と表せる集合の和集合である。

Bell-Ghioca-Tucker は予想 4.3 を $\delta_f = \delta_g$ の場合に証明した。([BGT2, Theorem 5.11.0.1] を見よ。)

5. 主定理の応用と予想

この節で述べる主定理の応用及び予想は、予想 4.3 を一般のエタール全射に拡張したものである。エタール性を課しているのは単に予想 4.1 が解けているクラスで大きいものがエタール射の場合くらいしかないからであり、それ以上の理由は特にない。実際定理 5.1 でも、$f^p \times g^q \colon X \times X \longrightarrow X \times X$ と対角因子 $Y = \Delta \subset X \times X$ の組に対して予想 4.1 が成り立ってさえいれば、f や g がエタールである必要はない。

定理 5.1. *X は 2 節の通りとする。$f, g \colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された X 上のエタールな自己全射とする。$x, y \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ を、次の 2 条件を満たす点とする:*

- ある $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $\alpha_f(x)^p = \alpha_g(y)^q > 1$
- $t_f(x) = t_g(y)$

ただしここで $t_f(x)$ と $t_g(y)$ は定理 3.1 のものである。このとき集合

$$S_{f,g}(x, y) := \{(m, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^m(x) = g^n(y)\}$$

は、ある整数 $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて

$$\{(a_i + b_i\ell, c_i + d_i\ell) \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

表せる集合の有限和である。

予想 5.2. *X は 2 節の通りとする。$f, g \colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された X 上のエタールな自己全射とする。$x, y \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ を、$\alpha_f(x) > 1$ かつ $\alpha_g(y) > 1$ を満たし、かつ次の 2 条件の少なくとも一方を満たす点とする:*

- ある無理数 $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在して $\alpha_f(x) = \alpha_g(y)^r$
- $t_f(x) \neq t_g(y)$

ただしここで $t_f(x)$ と $t_g(y)$ は定理 3.1 のものである。このとき集合

$$S_{f,g}(x, y) := \{(m, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^m(x) = g^n(y)\}$$

は有限集合である。

定理 5.3. *X は 2 節の通りとする。$f, g \colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された X 上の(エタールとは限らない)自己全射とする。ある豊富な $\mathbb{R}$-因子 H と実数 $\delta_f > 1$ があって $f^*H \equiv \delta_f H$ を満たし、かつ f と g が可換であると仮定する。$x, y \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について、ある無理数 $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在して $\alpha_f(x) = \alpha_g(y)^r$ をみたすならば、集合*

$$S_{f,g}(x, y) := \{(m, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^m(x) = g^n(y)\}$$

は有限集合である。

References

[BGT1] Bell, J. P., Ghioca, D., Tucker, T. J., *The Dynamical Mordell-Lang problem for étale maps*, Amer. J. Math. **132** (2010), 1655-1675.

[BGT2] Bell, J. P., Ghioca, D., Tucker, T. J., *The Dynamical Mordell-Lang Conjecture* volume 210 of Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2016).

[GT] Ghica, D., Tucker, T. J., *Peroodic points, linearizing maps, and the dynamical Mordell-Lang problem*, J. Number Theory **129** (2009), 1392-1403.

[KS] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 5009-5035.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail address: ksano@math.kyoto-u.ac.jp