$\mathcal{W}$ 代数の coproduct 構造

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
元良 直輝 (Naoki Genra) *

1 はじめに

有限次元簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，そのべき零元 f，複素数 k のデータに依存して定義される（アファイン）$\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は，定義の煩雑さのため一般には生成元も関係式も知られていないが，様々な表現論や量子群を含む代数との関連から，その性質や表現論を調べることが可能である．本稿ではスクリーニング作用素による解析を通じて A 型の $\mathcal{W}$ 代数の coproduct と呼ぶべき構造について調べることができることを示す.

2 $\mathcal{W}$ 代数とは

Virasoro 代数とは

$$Vir = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$$

であって

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C, \quad [Vir, C] = 0.$$

によって定義される Lie 代数である．その表現圏には中心 C がスカラー倍（＝中心電荷）で作用する際に特別な値であれば fusion 積によってモジュラーテンソル圏の構造が入り，Verlinde 公式によって計算することができる．そうした興味深い表現圏を与えてくれる Virasoro 代数の一般化として考えられたのが $\mathcal{W}$ 代数である．Virasoro 代数は Lie 代数だったのに対して一般の $\mathcal{W}$ 代数は頂点代数構造を持つ．$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V が頂点代数とは，V の元 A に対して End$V$ 係数の形式的べき級数

$$A(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_{(n)}z^{-n-1} \in \mathrm{End}V \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

が対応し，任意の $A, B \in V$ に対して

$$[A_{(m)}, B_{(n)}] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (A_{(j)}B)_{(m+n-j)}$$

などの関係式を満たすものである．$A(z)$ を $A \in V$ の場という．一般に $\mathcal{W}$ 代数のほとんどでこの関係式の右辺は無限和になり, 従って End$V$ の元として見做すしかない．特にその表現論を解析す

*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

るのは非常に難しい．一番初めに発見された $\mathcal{W}$ 代数は Zamolodchikov による $\mathcal{W}_3$ 代数である [Z]．Fateev-Lukyanov らによってさらなる $\mathcal{W}$ 代数が発見され ([FL])，Feigin-Frenkel によって BRST 還元法と呼ばれるコホモロジーを用いて有限次元簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と複素数 k に依存して $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ が構成された [FF2]. $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2)$ は中心電荷が

$$c(k) = 1 - 6\frac{(k+1)^2}{k+2}$$

の Virasoro 代数であり，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3)$ は $\mathcal{W}_3$ 代数となる．最終的に Kac-Roan-Wakimoto によって $\mathfrak{g}$, k の他に $\mathfrak{g}$ のべき零元 f にも依るように一般化された [KRW]．これを $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ と表し，

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = Vir, \quad \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) = \mathcal{W}_3$$

が成り立つ．一般に主べき零元 $f = f_{\text{prin}}$ に対して $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}}) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ である．さらに $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, 0)$ は $\mathfrak{g}$ のレベル k のアファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ と見做せる．ここでアファイン Lie 代数とは

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}1$$

であって

$$[a \otimes f(t), b \otimes g(t)] = [a, b] \otimes f(t)g(t) + k(a|b)\operatorname*{Res}_{t=0} f'(t)g(t)dt$$

で定義される Lie 代数である．ただし $(a|b)$ は正規化された $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式とする．

3　スクリーニング作用素

$\mathcal{W}$ 代数は BRST 還元法による 0 次コホモロジーとして定義されるため，生成元や関係式を知ろうと思うとそのコホモロジー類を計算しなければならないがこれは一般にほとんど不可能である．よって $\mathcal{W}$ 代数の代数構造を知るにはなんらかの別のアプローチを考える必要があり，ここではスクリーニング作用素を用いた別構成法を与える．スクリーニング作用素とは Fateev-Lukyanov による $\mathcal{W}$ 代数の定義であり，Feigin-Frenkel は，BRST 還元法による定義から同じものを再構成できることを示した [FF3]. 具体的には $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に付随する Heisenberg 代数 (=$\hat{\mathfrak{h}}$) の Fock 空間 $\mathcal{H}$ の中で $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ が

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{\alpha \in \Pi} \operatorname{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{k+h^\vee}} \int \alpha(z)} dz \subset \mathcal{H}.$$

として構成される．ただし k は独立変数と見做し，Π は単純ルートの集合，$h^\vee$ は双対 Coxeter 数，$\alpha(z)$ は $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ と Killing 形式で対応する $\mathfrak{h}$ の元によって定まる $\mathcal{H}$ の場とする．右辺の作用素たちをスクリーニング作用素と呼ぶ．$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n)$ の生成元はこの構成法を介して計算することができる．これを一般の $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ に対しても拡張することは自然に考えられる．

定理 3.1 ([G1]). 一般の $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ に対しても $\mathfrak{g}$ のある簡約 Lie 部分代数 $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ のアファイン化 $\hat{\mathfrak{r}}$ の表現空間（=アファイン頂点代数 $V(\mathfrak{r})$）と $\beta\gamma$ システムと呼ばれる頂点代数 $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ のテンソル積の中でスクリーニング作用素を用いて構成できる．

一般化するにあたってアファイン頂点代数が現れたことで空間が複雑になり，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ の時ほどスクリーニング作用素が簡単に計算することができない．そこでアファイン頂点代数をもっと簡単な空間に埋め込むことでスクリーニング作用素を計算することを考える．次節以降ではその適切な空間として脇本表現を考えればいいことを明らかにする．

4　アファイン Lie 代数の脇本表現

$\mathfrak{g}$ と k に付随するアファイン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現でもある．一般に $\hat{\mathfrak{g}}$ の（適切な条件を満たした）加群 M に対して BRST 還元法を施すことができ，特に $\mathcal{W}$ 代数は $V^k(\mathfrak{g})$ に BRST 還元法を施した時の 0 次コホモロジー

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H^0_{DS,f}(V^k(\mathfrak{g}))$$

に一致する．さらに構成から $H^0_{DS,f}(M)$ は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$-加群の構造を持つこともわかる．そこでこの関手 $H^0_{DS,f}(?)$ を用いて $\mathcal{W}$ 代数の構造を解析しようとするのは自然である．こうした $\mathcal{W}$ 代数の表現の構成を $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現に対して適用することを考える．そこでまずは $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現を導入する．

$\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群を G，上三角 Borel 部分群を B_+，下三角 Borel 部分群を B_- とする．旗多様体 G/B_- への G の左作用を考えると $\mathfrak{g}$ はベクトル場として G/B_- 上の正則関数に作用することがわかる．$N_+ = [B_+, B_+]$ とすると $N_+ \cdot \bar{e} \simeq N_+$ は G/B_- の極大稠密開集合であり，作用を制限することで Lie 代数の射 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathcal{D}_{N_+}$ が得られる．ただし $\mathcal{D}_{N_+}$ は N_+ の正則関数上の微分環である．指数写像によって $\mathfrak{g}$ のべき零 Lie 部分代数 $\mathfrak{n}_+$ と N_+ を同一視すれば，その上の正則関数全体は N_+ 上の多項式環となることがわかる．$\mathfrak{sl}_2$ ならば $N_+ = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ であり $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$\rho(e) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho(h) = -2x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho(f) = -x^2\frac{\partial}{\partial x}$$

となる．さらに $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の双対 $\mathfrak{h}^*$ の元 $\chi \in \mathfrak{h}^*$ による捻り

$$\rho_\chi(e) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho_\chi(h) = -2x\frac{\partial}{\partial x} + \chi(h), \quad \rho_\chi(f) = -x^2\frac{\partial}{\partial x} + \chi(h)x$$

を加えることもできる．この ρ_χ のアファイン版を考える．$\mathcal{D}_{N_+}$ は

$$[\partial/\partial x, x] = 1, \quad [\partial/\partial x, \partial/\partial x] = [x, x] = 0$$

によって定義されているので，そのアファイン類似

$$[a_m, a^*_n] = \delta_{m+n,0}, \quad [a_m, a_n] = [a^*_m, a^*_n] = 0$$

を満たす a_n, a^*_n で生成される代数 (=無限次元 Weyl 代数) を考える．一般には a_n, a^*_n を $\dim N_+$ 個のペアだけ用意して定義する．無限次元 Weyl 代数の Fock 空間を $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}$，$\mathfrak{h}$ に付随する Heisenberg 代数の Fock 空間 $\mathcal{H}$（$\mathfrak{h}^*$ による捻りに対応する）として Lie 代数の射 $\hat{\rho} : \hat{\mathfrak{g}} \to \mathrm{End}(\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H})$ が構成できる．さらに $\hat{\rho}$ は頂点代数の単射準同型

$$\hat{\rho} : V^k(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}$$

となる．$\mathfrak{sl}_2$ では

$$\hat{\rho}(e(z)) = a(z), \quad \hat{\rho}(h(z)) = -2 :a^*(z)a(z): + b(z), \quad \hat{\rho}(f(z)) = -:a^*(z)^2a(z): + b(z)a^*(z) + k\partial_z a^*(z).$$

ただし $b(z)$ は $\mathcal{H}$ の h に対応する場であり，左辺の $u(z)$（$u \in \mathfrak{sl}_2$）は

$$u(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (u \otimes t^n) z^{-n-1}.$$

さらに二つの場 $A(z), B(z)$ に対し $:A(z)B(z):$ は

$$:A(z)B(z): = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\sum_{m\geq 0} B_{(n)}A_{(m)} + \sum_{m<0} A_{(m)}B_{(n)})z^{-m-n-2}$$

で定義される場である．以上の構成から $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$-加群になり，頂点代数構造を持つ．$\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現という [W, FF1]． 一般には Heisenberg 代数の最高ウェイト表現 $\mathcal{H}_\lambda$（$\lambda\in\mathfrak{h}^*$）に対して $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}_\lambda$ は $\hat{\mathfrak{g}}$-加群となりこれも脇本表現と呼ぶ．$V^k(\mathfrak{g})$ は $\hat{\rho}$ により $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}$ の中に埋め込まれ，さらに Feigin-Frenkel によってその像は（k を独立変数と見做せば）スクリーニング作用素によって記述できる：

$$V^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{\alpha\in\Pi} \mathrm{Ker}\ S_\alpha.$$

ただし $S_\alpha : \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H} \to \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_\alpha}$ は

$$S_\alpha = \int \hat{\rho}^R(e_\alpha(z))\ \mathrm{e}^{\int\lambda_\alpha(z)}dz$$

（$\lambda_\alpha = -\alpha/(k+h^\vee)\in\mathfrak{h}^*$）で定義される．ここで e_α は $\alpha\in\Pi$ に対応するルートベクトル，$\hat{\rho}^R$ は N_+ の自分自身への右作用から誘導された Lie 代数の反準同型 $\rho^R : \mathfrak{n}_+ \to \mathcal{D}_{N_+}$ のアファイン版である．以上より次の完全系列を得る：

$$0 \to V^k(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\hat{\rho}} \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H} \xrightarrow{\bigoplus S_\alpha} \bigoplus_{\alpha\in\Pi} \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_\alpha}. \tag{1}$$

5 $\mathcal{W}$ 代数の脇本表現

N_+ に適切な座標系を与えることで関手 $H^0_{DS,f}(?)$ を完全系列 (1) に施した結果が

$$0 \to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \xrightarrow{\hat{\mu}} \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}\otimes\mathcal{H}\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \xrightarrow{\bigoplus Q_\alpha} \bigoplus_{\alpha\in\Pi} \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_\alpha}\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \tag{2}$$

と計算できる．ここで $\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}$ は $\mathfrak{r}_+ = \mathfrak{n}_+\cap\mathfrak{r}$ の無限次元 Weyl 代数の Fock 空間，$F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ は定理 3.1 で現れた $\beta\gamma$ システム，Q_α は S_α から誘導されたスクリーニング作用素である．この $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$-加群 $\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}\otimes\mathcal{H}\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ を $\mathcal{W}$ 代数の脇本表現と呼ぶ．

定理 5.1 ([G2])**.** Q_α は S_α の式から計算して陽に計算できる．

したがって

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \simeq \bigcap_{\alpha\in\Pi} \mathrm{Ker}\ Q_\alpha$$

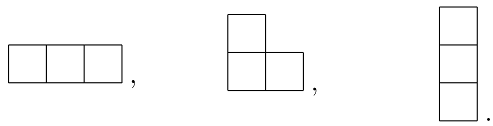
と Q_α の具体形を用いて $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の生成元を計算することができる．さらにここで得られた Q_α の一部をとってきて共通核を考えると $V(\mathfrak{r})\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ に一致し，残りのスクリーニング作用素は定理 3.1 のものと（出自は異なるにもかかわらず）完全に一致することが証明できる．したがって定理 5.1 は定理 3.1 の陽な表示を与えることになっている．特に $f = f_{\mathrm{prin}}$ の時，これは Feigin-Frenkel の結果に一致する．

6 Coproduct 構造

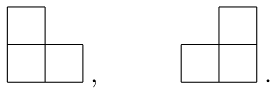
$\mathfrak{gl}_n$ のべき零元 f_1 と f_2 が $GL_n(\mathbb{C})$ の作用で共役ならば $\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, f_1)$ と $\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, f_2)$ は同型になる．$\mathfrak{gl}_n$ のべき零元の共役類は Jordan 標準形で分類され，n の分割＝ Young 図形を用いて表せる．$n = 3$ ならば

$$f = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

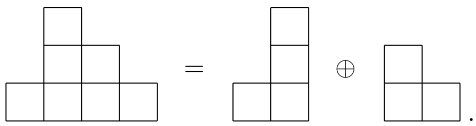
3 の分割: (3), (2, 1), (1, 1, 1),

Young 図形: 

Young 図形の箱の横へのずらしを考えたい．上の例では真ん中の図形のみ次のようにずらせる．



ずらされた図形をピラミッドと呼ぶ．ピラミッド $\mathcal{P}$ を縦のラインに沿って二つのピラミッド $\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_2$ に分割できるとき $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ と表す.. 例えば



ピラミッド $\mathcal{P}$ に対して元の Young 図形に対応する $\mathfrak{gl}_n$ のべき零元を $f_{\mathcal{P}}$ として，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, f_{\mathcal{P}})$ とする．

定理 6.1. 任意のピラミッドの分割 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ を考える．
(1) 頂点代数の射

$$\Delta : \mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) \to \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{gl}_{n_1}, \mathcal{P}_1) \otimes \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{gl}_{n_2}, \mathcal{P}_2)$$

が存在する．ただし n_i は $\mathcal{P}_i$ に含まれる箱の数，k_i は $k + n = k_1 + n_1 = k_2 + n_2$ を満たす．
(2) Δ は coassociative である．
(3) さらに k が独立変数（または generic な値）のとき Δ は単射である．

証明. $\mathcal{W}$ 代数の脇本表現を用いれば独立変数 k に対し

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) \simeq \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker}\, Q_{\alpha_i}. \tag{3}$$

定理 5.1で Q_α の式を具体形を用いることで,

$$\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{gl}_{n_1}) \simeq \bigcap_{i=1}^{n_1-1} \mathrm{Ker}\, Q_{\alpha_i}, \quad \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{gl}_{n_2}) \simeq \bigcap_{i=n_1+1}^{n-1} \mathrm{Ker}\, Q_{\alpha_i} \tag{4}$$

となることがわかる．一方で Q_{α_i} と Q_{α_j} は $|i-j|>1$ なら可換だから完全系列

$$0 \to \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker}\, Q_{\alpha_i} \to \bigcap_{i=1}^{n_1-1} \mathrm{Ker}\, Q_{\alpha_i} \otimes \bigcap_{i=n_1+1}^{n-1} \mathrm{Ker}\, Q_{\alpha_i} \xrightarrow{Q_{\alpha_{n_1}}} \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_{\alpha_{n_1}}} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \tag{5}$$

を得る．(3)(4) と (5) によって (5) の最初の単射準同型が（独立変数 k での）Δ である．一般の値 k に対しては evaluation すればよいが，その場合は単射性が非自明になることに注意する．示していないのは coassociativity だが，これは N_+ にうまく座標を入れ直すことで特別な場合には定理 5.1 から，一般の場合には定理 3.1 で構成したスクリーニング作用素との compatibility を用いることで証明される． □

参考文献

[FL] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov. Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional conformal field theory. *Sov. Sci. Rev. A. Phys.*, 15:1–117, 1990.

[FF1] B. L. Feigin, E. Frenkel. A family of representations of affine Lie algebras. *Russ. Math. Surv.*, 43(5):221-222, 1988.

[FF2] B. L. Feigin, E. Frenkel. Quantization of Drinfel'd-Sokolov reduction. *Phys. Lett., B* 246(1–2):75–81, 1990.

[FF3] B. L. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel'fand-Dikii algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1992.

[G1] N. Genra. Screening Operators for $\mathcal{W}$-algebras. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):2157–2202, 2017.

[G2] N. Genra. Coproducts for Affine $\mathcal{W}$-algebras. in preparation.

[KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[W] M. Wakimoto. Fock representations of affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.*, 104:605–609, 1986.

[Z] A. B. Zamolodchikov. Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory. *Teoret. Mat. Fiz.*, 65(3):347–359, 1985.