等差数列の存在性とフラクタル次元の関係性について

齋藤 耕太 (Kota Saito)

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　博士前期課程 1 年

m17013b@math.nagoya-u.ac.jp

概 要

Szemerédi により正密度をもつ自然数の部分集合は任意の長さの等差数列を含むことが示された。この講演ではそれのフラクタル幾何学での類似を考える。結果として $\mathbb{R}$ の部分集合が，与えられた長さ k の“弱”等差数列を含むためのフラクタル次元の十分条件を得た。この結果により，長さ k が与えられたとき次元が 1 に十分近い実数の部分集合は“弱”等差数列を含むことがわかる。また，等差数列の高次元化を考えることで $\mathbb{R}^d$ の場合も同様の議論ができる。最後に数論的応用を述べる。本研究は Jonathan.M. Fraser と Han Yu の共同研究である。

1　はじめに

$k \geq 1$ を自然数とし，実数の部分集合 $\{a_j\}_{j=0}^{k-1}$ が任意の $j = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して

$$a_j = a_0 + j\Delta$$

となるとき，$\{a_j\}_{j=0}^{k-1}$ を長さが k，公差が $\Delta > 0$ の等差数列 (arithmetic progression) という。また，任意の自然数 k に対して，集合 $F \subset \mathbb{R}$ が $P \subset F$ となる長さ k の等差数列 P が存在するとき，F は任意の長さの等差数列を含むという。

ここでは，与えられた集合に等差数列が存在するのかという問題を扱う。とくに，具体的な集合ではなく，ある条件を満たす集合が等差数列を含むか否かを考える。例えば，等差数列の存在定理で有名なもので Szemerédi の定理と呼ばれる定理がある。

Theorem 1.1 (Roth(長さ 3)，Szemerédi(長さ 4 以上) [R, Sz1, Sz2]) $F \subset \mathbb{N}$ が正密度をもつ，つまり，

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F \cap [1, 2, \ldots, N]}{N} > 0$$

を満たすとき，F は任意の長さの等差数列をもつ。

この定理のフラクタルでの類似を考える。自然数では密度を測ればいいが，連続濃度の場合には集合の ‘複雑さ’ を表すフラクタル次元を用いる。Hausdorff 次元や upper box 次元など多くのフラクタル次元が知られているが，私たちは Assouad 次元を用いた。

Definition 1.2 (Assouad dimension [A]) (X,d) を距離空間とする。空でない部分集合 $F \subset X$ の *Assouad* 次元を

$$\dim_A F \;=\; \inf\left\{ s \geq 0 \;:\; (\exists\, C>0)\ (\forall\, R>0)\ (\forall\, r \in (0,R))\ (\forall\, x \in F) \right.$$
$$\left. N\big(B(x,R)\cap F, r\big) \;\leq\; C\left(\frac{R}{r}\right)^{s} \right\}$$

と定める。ただし，$B(x,R)$ は x を中心として半径 R の閉球で，$N(E,r)$ を直径 r 以下の開集合で集合 E を被覆できる最小個数と定義する。

Assouad 次元は 1979 年に Assouad によって導入されたフラクタル次元である ([L] が詳しい)。大きな特徴として，Assouad 次元は非常 ‘大きい’ 次元である。より厳密に言うと，Assouad 次元は現在知られている全てのフラクタル次元の上界として与えられる。

ここで，次の図を見ていただきたい。

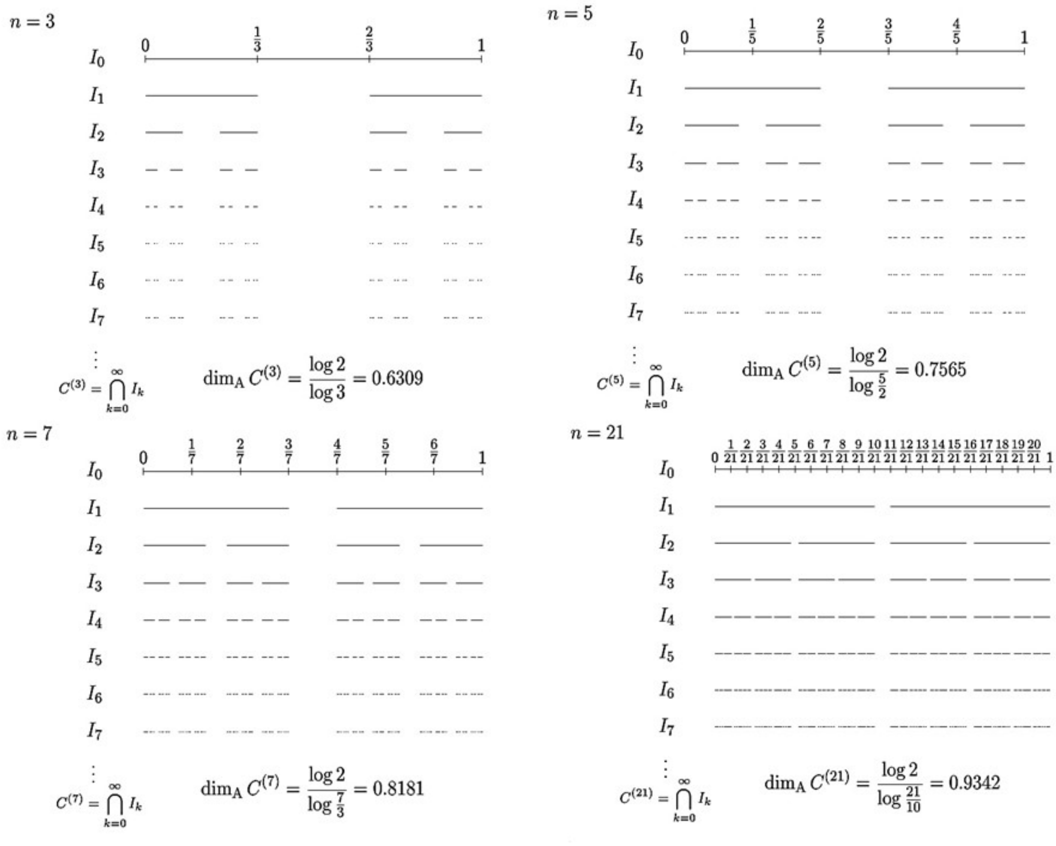

図 1: Cantor 集合

この図により，感覚的には Assouad 次元が 1 に近づけば近づくほど直線に近づいていくことがわかる。したがって，次が成り立つことが予想されるだろう。

Question 1.3 $F \subseteq \mathbb{R}$ に対して，$\dim_{\mathrm{A}} F = 1$ ならば F は任意の長さの等差数列を含むか。

しかし，この答えは否である。1998 年の Keleti により，Assouad 次元が 1 で (より厳密に言うと Hausdorff 次元が 1 で) 長さ 3 の等差数列を含まないような実数の部分集合が構成された [K]。すなわち，Assouad 次元と真の等差数列での Szemerédi の類似はできないことがわかる。

そこで，私たちは等差数列を弱くした (k, ε)-等差数列を導入した。

2 主結果

Definition 2.1 (Fraser, Saito, and Yu [FSY]) $\{a_j\}_{j=0}^{k-1} \subset \mathbb{R}$ とする。$k \geq 3$ と $\varepsilon \geq 0$ に対して

$$|a_j - b_j| \leq \varepsilon \Delta$$

となる長さ k，公差 $\Delta > 0$ の等差数列 $\{b_j\}_{j=0}^{k-1}$ が存在するとき，$\{a_j\}_{j=0}^{k-1}$ を (k, ε)-等差数列という。

つまり，(k, ε)-等差数列とは等差数列で近似できる列のことをいう。この (k, ε)-等差数列を用いて，次を示した。

Theorem 2.2 $F \subset \mathbb{R}$ とし， $k \geq 3$，$\varepsilon \in (0, 1/2)$ とする。F が (k, ε)-等差数列を含まないとき，

$$\dim_{\mathrm{A}} F \leq 1 + \frac{\log(1 - 1/k)}{\log\left(k\lceil 1/(2\varepsilon)\rceil\right)}$$

が成り立つ。

また不等式がどれほど改善することができるのか表すために次の例を構成した。

Theorem 2.3 $k \geq 3$ とし， $\varepsilon \in (0, 1)$ を $\varepsilon < (k-2)/4$ 満たすものとする。このとき，(k, ε)-等差数列を含まず，

$$\dim_{\mathrm{A}} F = \dim_{\mathrm{H}} F = \frac{\log 2}{\log \frac{2k-2-4\varepsilon}{k-2-4\varepsilon}}.$$

を満たす $F \subset \mathbb{R}$ が存在する。

これらの証明のアイデアは講演の際に述べる予定である。

Theorem 2.2と Theorem 2.3により，

$$D(k, \varepsilon) = \sup\{\dim_{\mathrm{A}} F \,:\, F \subset \mathbb{R} \text{ は } (k, \varepsilon)\text{– 等差数列を含まない }\}$$

と定義したとき，

$$\frac{\log 2}{\log \frac{2k-2-4\varepsilon}{k-2-4\varepsilon}} \leq D(k,\varepsilon) \leq 1 + \frac{\log(1-1/k)}{\log\left(k\lceil 1/(2\varepsilon)\rceil\right)}$$

が成り立つことがわかる。この不等式がどれだけ改善できるかが今後の課題である。また，講演では高次元化あるいは数論的応用について述べる予定である。

参考文献

[A] P. Assouad. Étude d'une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans Rn. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), **15**, A731–A734

[FSY] J.M. Fraser, K. Saito, and H. Yu. Dimensions of sets which uniformly avoid arithmetic progressions, *preprint*, available at: https://arxiv.org/abs/1705.03335

[K] T. Keleti. A 1-dimensional subset of the reals that intersects each of its translates in at most a single point, *Real Anal.*, Exchange 24 (1998/99), 843–844.

[L] J. Luukkainen. Assouad dimension: antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures, *J. Korean Math. Soc.*,**35**, (1998), 23–76

[R] K.F. Roth. On Certain Sets of Integers, *J. London Math. Soc.*, **28**, (1953), 104–109.

[Sz1] E. Szemerédi. On Sets of Integers containing no four elements in arithmetic progression, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*,**20**, (1969), 89–104

[Sz2] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik. *Acta Arith.*, **27**, (1975), 199–245.