

可積分系におけるソリトンの量子古典対応

佐藤 純 (Jun Sato)

東京大学 先端科学技術研究センター

概要

デルタ関数型の相互作用をする一次元ボース気体は量子可積分系として知られており、ベータ仮説法によって厳密にエネルギー固有状態が構成される。一方、この模型を量子場で記述したときの運動方程式は、非線形 Schrödinger 方程式として広く知られる。ここで、非可換な量子場の演算子を、可換複素スカラー場に読み替える古典極限をとると、古典可積分方程式が得られ、逆散乱法によりソリトン解が系統的に構成される。この古典ソリトンと、もともとの量子場理論との対応関係は、長年の未解決問題である。今回我々は、粒子数分布が古典ソリトンのプロファイルと完全に一致する量子状態を構成することに成功した。さらに、振幅だけでなく、位相まで含めて完全に一致することが確認された。本レポートでは、これらの研究成果について簡単な解説を試みる。

1 はじめに

量子可積分系とは、ハミルトニアンと可換な保存量が無限個存在する量子系のことで、一次元ボース気体の模型である Lieb-Liniger 模型、一次元磁性体の模型である量子ハイゼンベルク模型、一次元電子系の模型である一次元ハバード模型などがその代表的な例であり、量子逆散乱法 (=代数的ベータ仮説法) によって厳密にエネルギー固有値およびエネルギー固有状態が構成される。これら量子可積分系において、ある種の古典極限をとると、古典可積分方程式が得られる場合がある。古典可積分方程式は、逆散乱法によってソリトン解が構成される。ここで、量子可積分系においても、この古典系におけるソリトンに対応する量子状態 (=量子ソリトン) が存在するのか、また、具体的に量子系におけるどのような物理量が古典ソリトンに対応するのか、ソリトンをより広い視野で統一的に理解する上で非常に重要で興味深い問題である。本レポートでは、一次元ボース気体における我々の研究結果について報告する。

2 量子ソリトン

2.1 一次元ボース気体

長さ L のリングに、質量 m のボソンが N 個ある一次元系を考える。この系の状態は N 体の波動関数 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ で記述される。ここで、 x_j は j 番目の粒子の位置座標を表す。粒子がボソンであることから、粒子の入れ替えに対する対称性 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \psi(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_N})$ が要請される。ここで、 $\sigma \in S_N$ は N 次の置換群の任意の元である。さて、この系のハミルトニアンは、運動エネルギーと 2 体相互作用のポテンシャルの和として

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{1 \leq j < k \leq N} V(x_j, x_k) \quad (2.1)$$

と書けるであろう。ここで、 p_j は j 番目の粒子の運動量であり、正準共役な位置座標 x_j を用いて $p_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ と書ける。以降、 $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ と略記し、 $2m = \hbar = 1$ とする単位系をとる。結局、運動エネルギーの項は $\frac{p_j^2}{2m} = -\partial_j^2$ と書けることになる。

次に 2 体相互作用のポテンシャル項であるが、粒子が接触したときのみ相互作用するデルタ関数型のポテンシャル

$$V(x_j, x_k) = 2c\delta(x_j, x_k) \quad (2.2)$$

を考える。ここで、 $|c|$ の大きさが相互作用の強さを表し、 $c > 0$ のとき斥力、 $c < 0$ のとき引力相互作用を表す。後で見ると、 $c \rightarrow 0$ の極限が自由ボソンの系、 $c \rightarrow +\infty$ の極限が (ほぼ) 自由フェルミオンの系に対応している。これから行うベータ仮説による対角化の手続きにおいては、 c の符号は関係なく平行に議論が進むが、励起状態、熱力学などの物理的状況は c の符号によって大きく異なる。

以降、ハミルトニアン

$$\mathcal{H}_{LL} = \sum_{j=1}^N (-\partial_j^2) + \sum_{1 \leq j < k \leq N} 2c\delta(x_j, x_k) \quad (2.3)$$

を対角化する問題考える。(LL は Lieb-Liniger の頭文字 [1]) また、系の全運動量 $K = \sum_{j=1}^N p_j$ は $K = \sum_{j=1}^N (-i\partial_j)$ と書ける。

2.2 座標ベータ仮説による対角化

この模型は座標ベータ仮説法によって、厳密に対角化される [2, 1]. 以下, 詳述する.

2.2.1 $N = 1$ のとき

1 粒子のときは相互作用はなく, ハミルトニアンは $\mathcal{H}_{LL} = -\partial_1^2$ となる. 微分方程式 $-\psi''(x_1) = E\psi(x_1)$ の解は, 自由粒子の波動関数を表す平面波

$$\psi(x_1) = e^{ik_1x_1} \quad (2.4)$$

となる. これが 1 粒子の場合のベータ波動関数である. エネルギーと運動量固有値は

$$E = k_1^2, \quad K = k_1 \quad (2.5)$$

となる. また, 周期境界条件 $\psi(x_1 + L) = \psi(x_1)$ から, 波数に対して条件

$$e^{ik_1L} = 1 \quad (2.6)$$

が課せられる. これが 1 粒子の場合のベータ方程式である. 1 粒子の場合はこれは簡単に解けて,

$$k_1 = \frac{2\pi}{L}I_1 \quad (I_1 \in \mathbb{Z}) \quad (2.7)$$

となる. ここで, 整数 I_1 はベータ量子数と呼ばれ, これを用いて励起状態が分類される. この場合, $I_1 = 0$ が基底状態, $I_1 = \pm 1$ が第一励起状態に対応している.

2.2.2 $N = 2$ のとき

2 粒子のときハミルトニアンは $\mathcal{H}_{LL} = -\partial_1^2 - \partial_2^2 + 2c\delta(x_1 - x_2)$ となる. 2 粒子以上の系から相互作用の効果が入ってくるが, ベータは, この場合にも波動関数が平面波の重ね合わせで書けること, および粒子の入れ替えによって重ね合わせの係数が散乱の効果を受けること, を要請して, 以下のベータ波動関数を提案した

$$\psi(x_1, x_2) = A_{12}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + A_{21}e^{i(k_2x_1+k_1x_2)} \quad (2.8)$$

ここで, 係数の比が散乱行列 $S_{12} := A_{21}/A_{12}$ によって表され, これは $x_1 = x_2$ での波動関数の接続条件から決定される. また, 波数 k_1, k_2 も自由な場合 (2.7) からずれ, これらはベータ方程式から決定される. 以下, これらを具体的に考察していく.

(‡) 衝突による接続条件～散乱行列

2 次元領域 $0 \leq x_1, x_2 \leq L$ において波動関数を決定したいのであるが, 相互作用があるのは線分 $x_1 = x_2$ 上だけであり, 領域を $x_1 < x_2$ と $x_2 > x_1$ の 2 つに分ければ, それぞれの領域内に限れば自由な系となり, 平面波で書けるであろう. そこで, それぞれの領域で波動関数としてベータ波動関数を仮に設け, のちに $x_1 = x_2$ でそれらを接続することを考える. 具体的には, 波動関数を以下のように 2 領域で定義する

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \psi_{12}(x_1, x_2) & (x_1 < x_2) \\ \psi_{21}(x_1, x_2) & (x_2 < x_1) \end{cases} \quad (2.9)$$

ただし, ボソンの対称性から, $\psi_{12}(x_1, x_2)$ を決定すれば自動的に $\psi_{21}(x_1, x_2)$ も

$$\psi_{21}(x_1, x_2) = \psi_{12}(x_2, x_1) \quad (2.10)$$

と決定する. 一般に, 領域 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ における波動関数 $\psi_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N)$ のみを決定すれば, その他の任意の領域 $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_N}$ における波動関数 $\psi_{\sigma}(x_1, \dots, x_N)$ も自動的に

$$\psi_{\sigma}(x_1, \dots, x_N) = \psi_{12\dots N}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_N}) \quad (2.11)$$

と決定する.

さて、 $\psi_{12}(x_1, x_2)$ としてベーテ波動関数

$$\psi_{12}(x_1, x_2) = A_{12}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + A_{21}e^{i(k_2x_1+k_1x_2)} \quad (2.12)$$

を仮定する。すると、ボソンの対称性 $\psi_{21}(x_1, x_2) = \psi_{12}(x_2, x_1)$ より、

$$\psi_{21}(x_1, x_2) = A_{12}e^{i(k_2x_1+k_1x_2)} + A_{21}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} \quad (2.13)$$

となる。ここで、 $x_1 = x_2$ において波動関数は連続であることに注意せよ。しかし、デルタ関数型ポテンシャルの効果により、波動関数の1階微分は不連続となる。以下、これを詳しく調べよう。

そのために、重心座標 $X := \frac{x_1 + x_2}{2}$ と相対座標 $x : x_1 - x_2$ を導入するのが便利である。波動関数は、

$$\psi(x, X) = \begin{cases} e^{iKX} \left(A_{12}e^{-\frac{1}{2}kx} + A_{21}e^{+\frac{1}{2}kx} \right) & (x > 0) \\ e^{iKX} \left(A_{12}e^{+\frac{1}{2}kx} + A_{21}e^{-\frac{1}{2}kx} \right) & (x < 0) \end{cases} \quad (2.14)$$

となる。ただし、 $K := k_1 + k_2$, $k := k_1 - k_2$ とした。ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}_{LL} = -2\partial_x^2 - \frac{1}{2}\partial_X^2 + 2c\delta(x) \quad (2.15)$$

と書き換えられる。ただし、 $\partial_X := \partial/\partial X$, $\partial_x := \partial/\partial x$ と略記した。これを用いて $x = 0$ での接続を考えるため、固有方程式 $\mathcal{H}_{LL}\psi(x, X) = E\psi(x, X)$ の両辺を $x = 0$ の近傍の微小区間で積分する。すなわち、積分

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathcal{H}_{LL}\psi(x, X)dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E\psi(x, X)dx \quad (2.16)$$

を考え、極限 $\epsilon \rightarrow +0$ をとる。まず、 $\psi(x, X)$ は $x = 0$ で連続 $\psi(x \rightarrow +0) = \psi(x \rightarrow -0) = e^{iKX} (A_{12} + A_{21})$ なので、右辺は $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で0になる。また、 $\partial_x^2\psi(x, X) = -K^2\psi(x, X)$ なので、左辺第2項も同様に0になる。したがって、

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (-2\partial_x^2 + 2c\delta(x))\psi(x, X)dx = -2 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\partial_x\psi(x, X)]_{-\epsilon}^{\epsilon} + 2c\psi(x \rightarrow \pm 0, X) \\ &= 2e^{iKX} [ik(A_{12} - A_{21}) + c(A_{12} + A_{21})] \end{aligned} \quad (2.17)$$

を得る。これから、散乱による係数の比

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = \frac{ik + c}{ik - c} = \frac{k - ic}{k + ic} = \frac{k_1 - k_2 - ic}{k_1 - k_2 + ic} = -\frac{k_2 - k_1 + ic}{k_1 - k_2 + ic} \quad (2.18)$$

が得られる。ここで、記号

$$T_{j\ell} := k_j - k_\ell + ic \quad (2.19)$$

および散乱行列

$$S_{j\ell} := -\frac{T_{\ell j}}{T_{j\ell}} = \frac{k_j - k_\ell - ic}{k_j - k_\ell + ic} \quad (2.20)$$

を導入すると、

$$A_{21} = S_{12}A_{12} \quad (2.21)$$

と書ける。これは、粒子1と2がすれ違うときに、散乱行列 S_{12} によって散乱を受けた

$$S_{12} : A_{12} \mapsto A_{21} \quad (2.22)$$

と読むことが出来る。ここで、 $c \rightarrow 0$ のとき $S_{j\ell} \rightarrow 1$ (自由ボソン), $c \rightarrow \infty$ のとき $S_{j\ell} \rightarrow -1$ (自由フェルミオン) となることに注意。

(#) 周期境界条件～ベーテ方程式

次に、周期境界条件

$$\psi(x_1 + L, x_2) = \psi(x_1, x_2), \quad (0 < x_1 < x_2 < L) \quad (2.23)$$

を考える。 $\psi(x_1 + L, x_2) = \psi_{21}(x_1 + L, x_2) = \psi_{12}(x_2, x_1 + L)$ より、

$$\begin{aligned} A_{12}e^{i[k_1x_2+k_2(x_1+L)]} + A_{21}e^{i[k_2x_2+k_1(x_1+L)]} &= A_{12}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + A_{21}e^{i(k_2x_1+k_1x_2)} \\ \iff e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}(A_{21}e^{ik_1L} - A_{12}) + e^{i(k_2x_1+k_1x_2)}(A_{12}e^{ik_2L} - A_{21}) \\ \iff A_{21}e^{ik_1L} - A_{12} &= A_{12}e^{ik_2L} - A_{21} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

となり、結局

$$e^{ik_1L} = \frac{A_{12}}{A_{21}} = S_{21} = -\frac{T_{12}}{T_{21}} = \frac{k_1 - k_2 + ic}{k_1 - k_2 - ic}, \quad e^{ik_2L} = \frac{A_{21}}{A_{12}} = S_{12} = -\frac{T_{21}}{T_{12}} = \frac{k_2 - k_1 + ic}{k_2 - k_1 - ic} \quad (2.25)$$

を得る。これが2粒子の場合のベーテ方程式である。

2.2.3 $N = 3$ のとき

3粒子の場合は、波動関数の定義域は $3! = 6$ 個の領域に分けられるが、領域 $x_1 < x_2 < x_3$ における波動関数 $\psi_{123}(x_1, x_2, x_3)$ だけを決定すればその他の任意の領域 $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < x_{\sigma_3}$ ($\sigma \in S_3$) における波動関数 $\psi_{\sigma}(x_1, x_2, x_3)$ はボソンの対称性 $\psi_{\sigma}(x_1, x_2, x_3) = \psi_{123}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, x_{\sigma_3})$ から決定される。

さて、2粒子のときと同様に、ベーテ型の波動関数

$$\begin{aligned} \psi_{123}(x_1, x_2, x_3) &= A_{123}e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)} + A_{132}e^{i(k_1x_1+k_3x_2+k_2x_3)} + A_{213}e^{i(k_2x_1+k_1x_2+k_3x_3)} \\ &\quad + A_{231}e^{i(k_2x_1+k_3x_2+k_1x_3)} + A_{312}e^{i(k_3x_1+k_1x_2+k_2x_3)} + A_{321}e^{i(k_3x_1+k_2x_2+k_1x_3)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

を仮に設ける。エネルギーと運動量の固有値は

$$E = \sum_{j=1}^3 k_j^2, \quad K = \sum_{j=1}^3 k_j \quad (2.27)$$

となることは明らかである。 $x_2 = x_3$ における波動関数の接続 ($\psi_{123}(x_1, x_2, x_3)$ と $\psi_{132}(x_1, x_2, x_3)$ の接続) を考えることによって、2粒子の場合と全く同様の計算により、散乱による係数の比

$$\frac{A_{132}}{A_{123}} = S_{23}, \quad \frac{A_{213}}{A_{231}} = S_{31}, \quad \frac{A_{321}}{A_{312}} = S_{12} \quad (2.28)$$

が得られる。同様に、 $x_1 = x_2$ における波動関数の接続 ($\psi_{123}(x_1, x_2, x_3)$ と $\psi_{213}(x_1, x_2, x_3)$ の接続) を考えることによって

$$\frac{A_{213}}{A_{123}} = S_{12}, \quad \frac{A_{321}}{A_{231}} = S_{23}, \quad \frac{A_{132}}{A_{312}} = S_{31} \quad (2.29)$$

が得られる。

さて、ここで、2体散乱を繰り返すことによって A_{123} から A_{321} を作る時、2通りのやり方があるが、それらが同じ結果を与える必要がある。すなわち、

$$\begin{aligned} A_{321} &= S_{12}A_{312} = S_{12}S_{13}A_{132} = S_{12}S_{13}S_{23}A_{123}, \\ A_{321} &= S_{23}A_{231} = S_{23}S_{13}A_{213} = S_{23}S_{13}S_{12}A_{123} \end{aligned} \quad (2.30)$$

より、散乱行列は関係式

$$S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{13}S_{12} \quad (2.31)$$

を満たす必要がある。これを、Yang-Baxter 関係式という [3, 4, 5].

波動関数の係数 A_{σ} は、散乱行列が $S_{j\ell} = -\frac{T_{\ell j}}{T_{j\ell}}$ と書けることにより、

$$\begin{aligned} A_{123} &= +T_{12}T_{13}T_{23}, & A_{132} &= -T_{13}T_{12}T_{32}, & A_{213} &= -T_{21}T_{23}T_{13}, \\ A_{231} &= +T_{23}T_{21}T_{31}, & A_{312} &= +T_{31}T_{32}T_{12}, & A_{321} &= -T_{32}T_{31}T_{21} \end{aligned} \quad (2.32)$$

とすればよいことが分かる。一般の N の場合には

$$A_\sigma = (-1)^\sigma \prod_{1 \leq j < \ell \leq N} T_{\sigma_j \sigma_\ell} = (-1)^\sigma \prod_{1 \leq j < \ell \leq N} (k_{\sigma_j} - k_{\sigma_\ell} + ic) \quad (2.33)$$

と書ける。

(‡) 周期境界条件～ベータ方程式

2粒子の場合と同様に周期境界条件を考慮することにより、

$$e^{ik_1 L} = \prod_{\ell=2,3} S_{\ell 1}, \quad e^{ik_2 L} = \prod_{\ell=3,1} S_{\ell 2}, \quad e^{ik_3 L} = \prod_{\ell=1,2} S_{\ell 3} \quad (2.34)$$

を得る。これが3粒子の場合のベータ方程式となる。同様にして、一般の N の場合のベータ方程式は

$$e^{ik_j L} = \prod_{\ell \neq j} S_{\ell j} = \prod_{\ell \neq j} \frac{k_j - k_\ell + ic}{k_j - k_\ell - ic} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.35)$$

となる。これは、 j 番目の粒子をリング長 L だけ一周させたとき、他の全ての粒子と散乱している様子を記述していると読める。

2.2.4 一般の粒子数 N の場合

以上の結果をまとめる。領域 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ においてベータ波動関数を

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) &= \sum_{\sigma \in S_N} A_\sigma \exp[i(k_{\sigma_1} x_1 + \dots + k_{\sigma_N} x_N)], \\ A_\sigma &= (-1)^\sigma \prod_{1 \leq j < \ell \leq N} (k_{\sigma_j} - k_{\sigma_\ell} + ic) \end{aligned} \quad (2.36)$$

で定めると、波数 $\{k_1, \dots, k_N\}$ がベータ方程式

$$e^{ik_j L} = \prod_{\ell \neq j} \frac{k_j - k_\ell + ic}{k_j - k_\ell - ic} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.37)$$

を満たすとき固有状態となり、エネルギーと運動量の固有値は

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2, \quad K = \sum_{j=1}^N k_j \quad (2.38)$$

で与えられる。

2.3 基底状態と励起状態の構成：斥力の場合

ベータ方程式 (2.37) はたくさんの解をもち、そのひとつひとつがそれぞれ固有状態に対応している。そこで、両辺の対数を取ることによって分岐を指定し、解を定めよう。そのために、散乱位相因子 $\theta(k)$ を

$$\frac{k + ic}{k - ic} = -e^{-i\theta(k)}, \quad \theta(k) = 2 \arctan \frac{k}{c} \quad (2.39)$$

で定める。これを用いてベータ方程式 (2.37) の対数をとると

$$ik_j L = 2\pi i n_j + \sum_{\ell \neq j} i\{\pi - \theta(k_j - k_\ell)\} \quad (2.40)$$

となり、整理して

$$k_j = \frac{2\pi}{L} I_j - \frac{1}{L} \sum_{\ell \neq j} 2 \arctan \frac{k_j - k_\ell}{c} \quad (2.41)$$

を得る。ここで n_j は任意の整数であり、 $I_j = n_j + (N - 1)/2$ とおいた。この $\{I_1, \dots, I_N\}$ をベータ量子数と呼び、粒子数 N が偶数のとき半奇整数、 N が奇数のとき整数をとる。

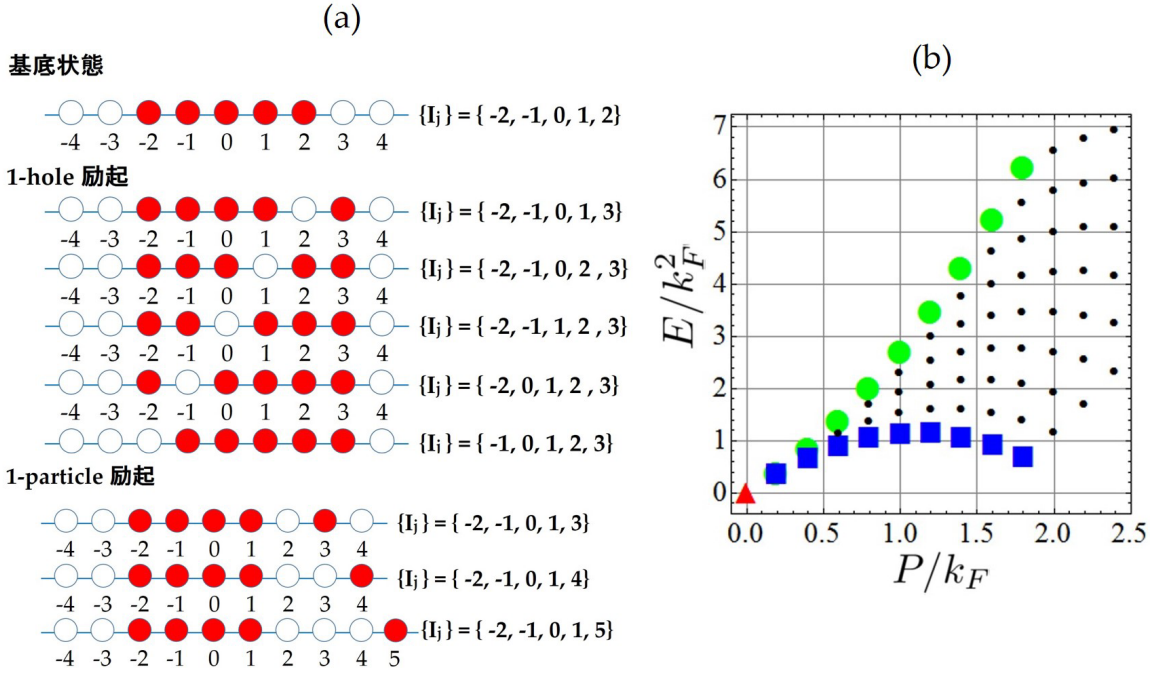


図 1: (a) 基底状態, 励起状態のベータ量子数の配置 (粒子数 $N = 5$) (b) 励起状態の分散関係. 赤い三角が基底状態, 青い四角が 1-hole 励起, 緑の丸が 1-particle 励起, その他の小さい点は 1 hole-1 particle 励起を表す (粒子数 $N = 10$, $c = 100$)

斥力相互作用のとき ($c > 0$) は, 互いに相異なるベータ量子数の組 $\{I_1 < I_2 < \dots < I_N\}$ を与えると, 唯一つの実数解 $\{k_1 < k_2 < \dots < k_N\}$ を持つことが証明できる [6, 7]. すなわち, ベータ量子数の組と固有状態とが 1 対 1 に対応している.

まず, 基底状態を与えるベータ量子数を決定しよう. ここで, $c \rightarrow \infty$ の極限をとると, ベータ方程式は $k_j = \frac{2\pi}{L} I_j$ となる. エネルギー固有値は $E = \sum_{j=1}^N k_j^2$ であるから, 基底状態を与えるベータ量子数は 0 のまわりにびっしり詰めたもの

$$\{I_1, \dots, I_N\} = \left\{ -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \dots, \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2} \right\} \quad (2.42)$$

となることがわかる (図 1(a) 一番上参照). これは, 一般の相互作用領域 $0 < c < \infty$ でも成り立つことが示せる. 励起状態は, この基底状態のベータ量子数の配置に孔を空けたり粒子を付け加えることによって構成することが出来る (図 1(a) 参照). 励起の分散関係は図 1(b) のようになる.

2.4 量子ソリトン状態の構成

我々は, 前述の 1-hole 励起状態を重ね合わせることによって, 量子ソリトン状態を構成することに成功した [8, 9]. 以下, これを説明する. 粒子数 N , 運動量 $P = 2\pi p/L (p = 0, 1, \dots, N-1)$ の規格化された 1-hole 励起状態を $|P, N\rangle$ と書く. ベータ量子数は具体的に,

$$\begin{aligned} I_j &= -(N+1)/2 + j \quad \text{for } 1 \leq j \leq N-p \\ &= -(N+1)/2 + j + 1 \quad \text{for } N-p+1 \leq j \leq N. \end{aligned} \quad (2.43)$$

で与えられる. 我々は, 位置 $X = qL/N (0 \leq q \leq N-1)$ に局在した波束状態 $|X, N\rangle$ を, 離散フーリエ変換

$$|X, N\rangle := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \exp(-2\pi i p q / N) |P, N\rangle. \quad (2.44)$$

によって構成し, これが古典ダークソリトンに対応することを発見した. 後に, この量子状態の粒子数分布は位置 X にくぼみを持ち, 古典ダークソリトンのプロファイルと一致することを示す.

3 古典ソリトン

3.1 非線形 Schrödinger 方程式

ボース場の演算子 $\hat{\psi}(x, t)$ は、交換関係

$$[\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}^\dagger(x, t)] = \delta(x - x'), \quad [\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}(x, t)] = [\hat{\psi}^\dagger(x, t), \hat{\psi}^\dagger(x, t)] = 0. \quad (3.1)$$

によって定められる。これを用いて、ハミルトニアン (2.3) を第二量子化表示で表すと、

$$\mathcal{H} = \int_0^L dx [\partial_x \hat{\psi}^\dagger \partial_x \hat{\psi} + c \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi} - \mu \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}], \quad (3.2)$$

となる。ただし、 μ は化学ポテンシャルである。この系のハイゼンベルクの運動方程式は

$$i\partial_t \hat{\psi} = -\partial_x^2 \hat{\psi} + 2c \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi} - \mu \hat{\psi}. \quad (3.3)$$

で与えられる。これは非線形 Schrödinger 方程式として広く知られている。

ここで、量子場の演算子 $\hat{\psi}(x, t)$ を複素スカラー場 $\psi_C(x, t)$ に読み替えると、

$$i\partial_t \psi_C = -\partial_x^2 \psi_C + 2c |\psi_C|^2 \psi_C - \mu \psi_C. \quad (3.4)$$

を得る。これは古典可積分方程式であり、逆散乱法により系統的にソリトン解が構成される [10]。斥力相互作用 $c > 0$ のときはダークソリトン解、引力相互作用 $c < 0$ のときはブライトソリトン解を持つことが知られている。引力相互作用の場合の量子古典対応は文献 [11] で議論されている。本レポートでは、 $c > 0$ を仮定し、ダークソリトン解を考える。

3.2 楕円関数解

周期境界条件の場合には方程式 (3.4) は楕円関数解を持つ。以下、添え字 C は省略し、具体的に 1-ソリトン解を構成する。速度 v で伝播する進行波解を仮定し、 $\psi(x, t) = \psi(x - vt)$ とすると、 $\psi_t = -v\psi'$ 、 $\psi_{xx} = \psi''$ より、

$$\psi'' - iv\psi' + \mu\psi - 2c|\psi|^2\psi = 0 \quad (3.5)$$

となる。ただし、下付き添え字はその文字による微分を表すとす。ここで、振幅と位相に対応する実数値関数 $\rho(x)$ と $\varphi(x)$ を導入して、

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)} e^{i\varphi(x)} \quad (3.6)$$

と書く。これを式 (3.5) に代入して実部と虚部に分けることにより、

$$\frac{(\sqrt{\rho})''}{\sqrt{\rho}} - (\varphi')^2 + v\varphi' + \mu - 2c\rho = 0, \quad 2\varphi' \frac{(\sqrt{\rho})'}{\sqrt{\rho}} + \varphi'' - v \frac{(\sqrt{\rho})'}{\sqrt{\rho}} = 0 \quad (3.7)$$

を得る。式 (3.7) の第二式を少し計算すると $(\rho\varphi' - v\rho/2)' = 0$ となり、積分定数を W として

$$\varphi'(x) = \frac{v}{2} + \frac{W}{\rho(x)} \quad (3.8)$$

を得る。これを式 (3.7) の第一式に代入して $\sqrt{\rho}(\sqrt{\rho})'$ をかけると、

$$(\sqrt{\rho})'(\sqrt{\rho})'' + \left(\mu + \frac{v^2}{4}\right) \sqrt{\rho}(\sqrt{\rho})' - W^2(\sqrt{\rho})^{-3}(\sqrt{\rho})' - 2c(\sqrt{\rho})^3(\sqrt{\rho})' = 0 \quad (3.9)$$

となり、一回積分できる。積分定数を V として、

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\rho}')^2 + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{v^2}{8}\right) (\sqrt{\rho})^2 + \frac{W^2}{2}(\sqrt{\rho})^{-2} - \frac{c}{2}(\sqrt{\rho})^4 = V \quad (3.10)$$

を得る。これを整理して、

$$\left(\frac{\rho'}{2}\right)^2 + U(\rho) = 0, \quad U(\rho) = -c\rho^3 + \left(\mu + \frac{v^2}{4}\right) \rho^2 - 2V\rho + W^2 \quad (3.11)$$

を得る。これは、ポテンシャル U で運動する一次元粒子のエネルギー保存則とみなすことができ、 $U(\rho) = 0$ の3実解を $a_1 < a_2 < a_3$ とすると、 $a_1 < \rho < a_2$ で振動する解があることがわかる。そこで、初期条件として $\rho(x=0) = a_1$ として、

$$\int_{a_1}^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{-U(r)}} = 2x, \quad a_1 \leq \rho \leq a_2 \quad (3.12)$$

を得る。積分変数を

$$r = a_1 + (a_2 - a_1)z^2, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (3.13)$$

と変換することにより、

$$2x = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{a_1}^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{(r-a_1)(a_2-r)(a_3-r)}} = \frac{2}{\sqrt{c}\sqrt{a_3-a_1}} \operatorname{sn}^{-1} \left(\sqrt{\frac{r-a_1}{a_2-a_1}}, k \right) \quad (3.14)$$

と楕円積分で表される。ただし、母数 k は

$$k = \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}} \quad (3.15)$$

で与えられる。楕円関数の関係式を使って変形すると、

$$\rho(x) = a_3 - (a_3 - a_1) \operatorname{dn}^2(\sqrt{a_3 - a_1} \sqrt{cx}, k) \quad (3.16)$$

を得る。また、式(3.8)を積分して

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{v}{2}x \pm \frac{\sqrt{a_2 a_3}}{\sqrt{a_1} \sqrt{a_3 - a_1}} \Pi \left(1 - a_2/a_1, \operatorname{am}(\sqrt{a_3 - a_1} \sqrt{cx}), k \right) \quad (3.17)$$

を得る。 φ_0 は任意の定数である。ここで、 $W = \pm \sqrt{ca_1 a_2 a_3}$ を使った。

4 量子古典対応

以下、量子波束状態(2.44)と古典ダークソリトン(3.16)(3.17)が一致することを見る。

4.1 粒子数密度分布

まず、量子場理論における粒子数密度の演算子 $\hat{\rho}(x)$ を $\hat{\rho}(x) := \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)$ で定める。これの量子波束状態 $|X, N\rangle$ における期待値は、

$$\langle X, N | \hat{\rho}(x) | X, N \rangle = \frac{1}{N} \sum_{p, p'=0}^{N-1} \exp \left[2\pi i (p - p') \left(\frac{x}{L} - \frac{q}{N} \right) \right] \langle P', N | \hat{\rho}(0) | P, N \rangle. \quad (4.1)$$

となる。ここで、形状因子 $\langle P', N | \hat{\rho}(0) | P, N \rangle$ の計算には以下の公式を用いる [12, 13, 14]

$$\langle P', N | \hat{\rho}(0) | P, N \rangle = (-1)^{N(N+1)/2} (P - P') \left(\prod_{j,\ell=1}^N \frac{1}{k'_j - k_\ell} \right) \left(\prod_{j>\ell}^N k_{j,\ell} k'_{j,\ell} \sqrt{\frac{\hat{K}(k'_{j,\ell})}{\hat{K}(k_{j,\ell})}} \right) \frac{\det U(k, k')}{\sqrt{\det G(k) \det G(k')}} \quad (4.2)$$

ただし、 $\{k_1, \dots, k_N\}$ と $\{k'_1, \dots, k'_N\}$ はそれぞれ $|P\rangle$ と $|P'\rangle$ に対応するベーテ方程式の根である。また、 $k_{j,\ell} := k_j - k_\ell$, $k'_{j,\ell} := k'_j - k'_\ell$ と略記した。核 $\hat{K}(k)$ は $\hat{K}(k) = 2c/(k^2 + c^2)$ で定義される。Gaudin 行列 $G(k)$ は

$$G(k)_{j,\ell} = \delta_{j,\ell} \left[L + \sum_{m=1}^N \hat{K}(k_{j,m}) \right] - \hat{K}(k_{j,\ell}) \quad \text{for } j, \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3)$$

で与えられる。行列 $U(k, k')$ は

$$U(k, k')_{j,\ell} = 2\delta_{j,\ell} \operatorname{Im} \left[\prod_{a=1}^N \frac{k'_a - k_j + ic}{k_a - k_j + ic} \right] + \frac{\prod_{a=1}^N (k'_a - k_j)}{\prod_{a \neq j}^N (k_a - k_j)} \left(\hat{K}(k_{j,\ell}) - \hat{K}(k_{N,\ell}) \right). \quad (4.4)$$

である。

この公式を用いて粒子数密度分布(4.1)を計算した結果と、古典ソリトンの振幅(3.16)を比較した結果を図2に示す。結合定数 c が小さい領域で、両者がびびったりと一致していることが分かる。

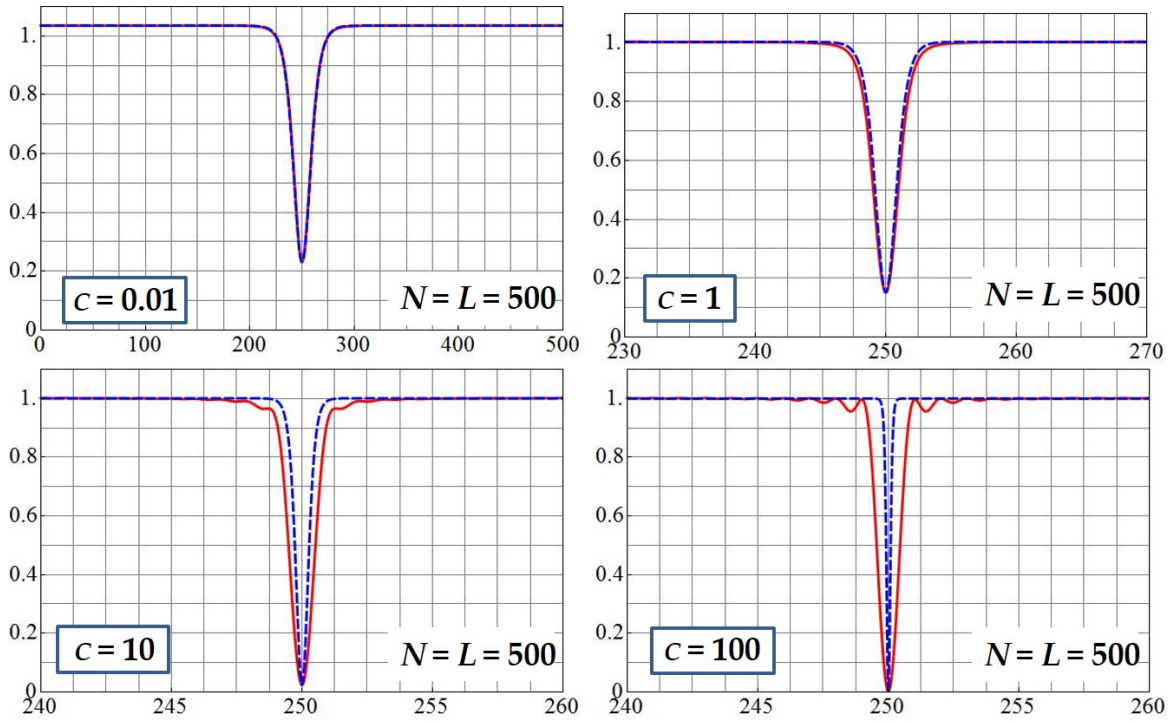


図 2: $N = L = 500$ における量子波束状態 $|X, N\rangle$ の粒子数密度分布 $\langle X, N | \hat{\rho}(x) | X, N \rangle$ を赤の実線で示す。また、古典ダークソリトンの振幅 (3.16) を青の破線で示す。 $c < 1$ の領域で両者は見事に一致している。

4.2 場の一点関数

続けて、量子場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ の一点関数

$$\begin{aligned} \psi_Q(x) &:= \langle X', N-1 | \hat{\psi}(x) | X, N \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{p'=0}^{N-2} \exp \left[2\pi i (p - p') \frac{x}{L} \right] \exp \left[-2\pi i \left(\frac{pq}{N} - \frac{p'q'}{N} \right) \right] \langle P', N-1 | \hat{\psi}(0) | P, N \rangle, \end{aligned} \quad (4.5)$$

を考えよう。以下、 $q = q' = 0$ の場合だけを考える。ここでは略すが、形状因子 $\langle P', N-1 | \hat{\psi}(0) | P, N \rangle$ にも、粒子数密度の場合と同様の行列式公式がある [12, 13, 15, 16]。この公式を用いて、場の一点関数の位相 $\text{Arg}[\psi_Q(x)]$ を計算した結果と、古典ソリトンの位相 (3.17) を比較した結果を図 3 に示す。両者が完全に一致していることが分かる。

5 まとめ

本レポートではまず、一次元ボース気体のベテ仮説による厳密解を紹介した。そして、1-hole 励起状態によって量子波束状態を構成できることを示した。次に、古典極限で得られる非線形 Schrödinger 方程式の楕円関数解を紹介し、先に得られた量子波束状態の粒子数密度分布、場の一点関数の位相が、古典ダークソリトンと見事に一致することを示した。これらの研究は、数値的な評価にとどまっており、両者の対応関係の解析的な議論や、ダイナミクスまで含めた両者の対応付けは、今後の重要な研究課題として残されている。

参考文献

- [1] E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963); E. H. Lieb, Phys. Rev. **130**, 1616 (1963).
- [2] H.A. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.
- [3] C.N. Yang, Phys. Rev. **168** (1968) 1920.

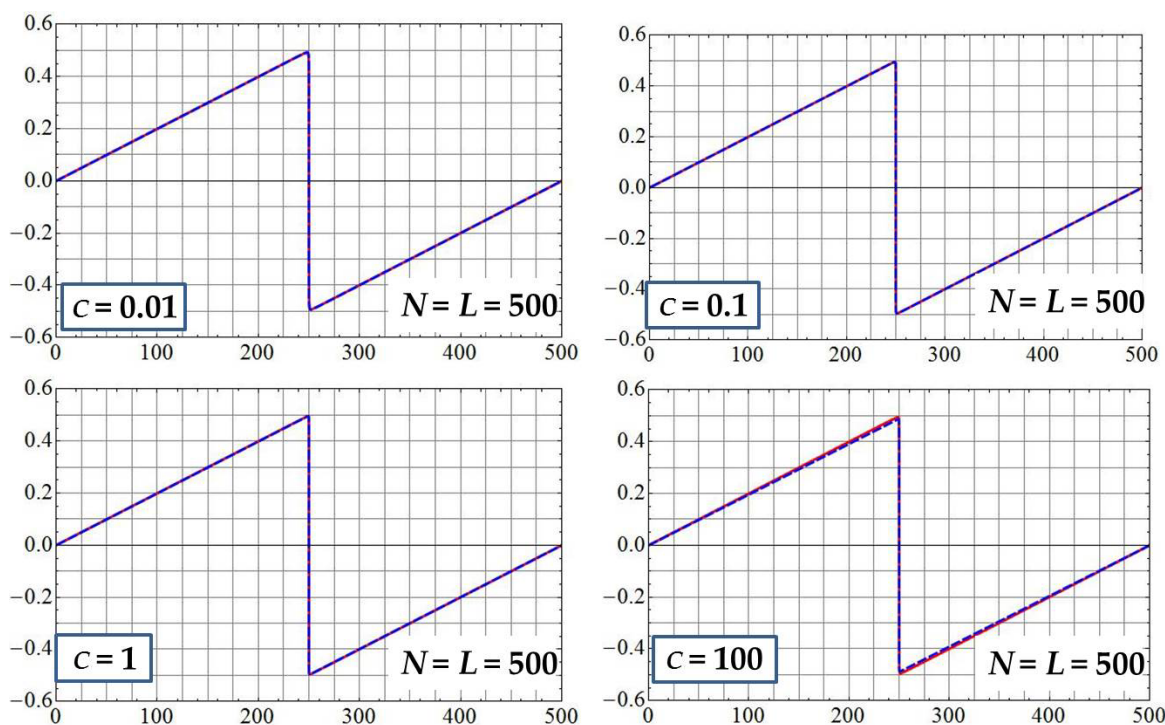


図 3: $N = L = 500$ における場の一点関数 $\psi_Q(x)$ の位相 $\text{Arg}[\psi_Q(x)]/\pi$ を赤の実線で示す. また, 古典ダークソリトンの位相 (3.17) を青の破線で示す. 両者は見事に一致していることが分かる.

- [4] R.J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 832.
- [5] R.J. Baxter, “*Exactly solved models in statistical mechanics*” (Academic Press, London, 1982)
- [6] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov and A.G. Izergin, “*Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*”, Cambridge University Press, 1993.
- [7] M. Takahashi, “*Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*”, Cambridge University Press, 1999.
- [8] J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, and T. Deguchi, Phys. Rev. Lett. **108**, 110401 (2012).
- [9] J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, and T. Deguchi, New J. Phys. **18**, 075008 (2016).
- [10] T. Tsuzuki, J. Low Temp. Phys. **4**, 441 (1971); V. E. Zakharov, A. B. Shabat, Sov. Phys.-JETP **34**, 62 (1972).
- [11] C. R. Nohl, Ann. Phys. **96**, 234 (1976); M. Wadati, M. Sakagami, J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 1933 (1984); M. Wadati, A. Kuniba, T. Konishi, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 1710 (1985); M. Wadati, A. Kuniba, J. Phys. Soc. Jpn. **55**, 76 (1986).
- [12] M. Gaudin, “*La fonction d’onde de Bethe*”, Masson (Paris) (1983); V. E. Korepin, Commun. Math. Phys. **86**, 391 (1982).
- [13] N. A. Slavnov, Teor. Mat. Fiz. **79**, 232 (1989); **82**, 389 (1990).
- [14] P. Calabrese and J.-S. Caux, J. Stat. Mech. (2007) P08032.
- [15] T. Kojima, V.E. Korepin, N.A. Slavnov, Commun. Math. Phys. **188**, 657 (1997)
- [16] J.-S. Caux, P. Calabrese and N. A. Slavnov, J. Stat. Mech. P01008 (2007).