ADE 型量子ループ代数のある加群圏の構造について

藤田 遼 (Ryo Fujita)*

京都大学大学院理学研究科数学教室

1 Introduction

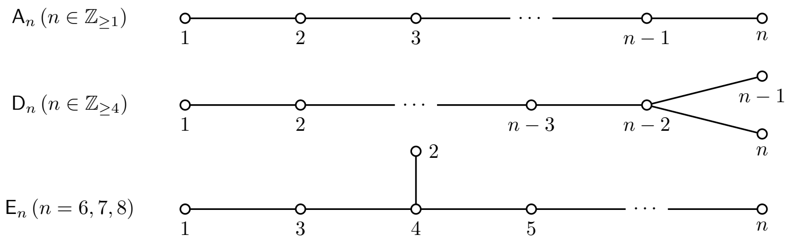
$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{U(\mathfrak{g})} \arrow[dl, "q\text{ 変形}"'] \arrow[dr, "\text{ループ化}"] & \\
\boxed{U_q(\mathfrak{g})} \arrow[dr, "\text{ループ化}"'] & & \boxed{U(L\mathfrak{g})} \arrow[dl, "q\text{ 変形}"] \\
 & \boxed{U_q(L\mathfrak{g})} &
\end{tikzcd}$$

物理学的な背景から，有限次元複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ もしくはその普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ に対し，「q 変形」と「ループ化」という 2 種類の変形を考えることが多い．ここで，「q 変形」とはパラメータ q を付加することによる Hopf 代数の非余可換変形（Drinfeld-神保の量子包絡環）$U_q(\mathfrak{g})$ を指し，「ループ化」とは $\mathbb{C}^{\times}$（S^1 の複素化）から $\mathfrak{g}$ への（代数的な）写像全体 $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ のなす Lie 代数を指す．本稿の主題である量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ はこの 2 種類の変形を同時に行って得られる代数系である．これはもともと三角関数型 R 行列との関連で量子可積分系で興味を持たれてきた対象であり，その加群圏は複雑で豊かな構造を持つ．現在も団代数のモノイダル圏論化などと関係して活発に研究されている．

ここでは，ADE 型 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元表現論について述べる．それは，ADE 型 Dynkin 図形の各辺に向きを与えて得られる Dynkin 箙 Q や箙多様体と深く結びついている．本稿では特に，各 Dynkin 箙 Q に対して Hernandez-Leclerc [6] が定義した $U_q(L\mathfrak{g})$ の良い加群圏 $\mathcal{C}_Q$ の構造が箙 Q の表現論や箙多様体の幾何とどのように関係しているかを説明したい．

2 量子ループ代数の表現論

2.1 Dynkin 図形と Lie 代数



有限次元の複素単純 Lie 代数（の同型類）は Dynkin 図形でラベル付けられる．Dynkin 図形は有限個の頂点と，それらを結ぶ 3 種類の辺（単純辺，有向 2 重辺，有向 3 重辺）たちからなる図形であって，古典型と呼ばれる 4 つの無限系列 $\mathsf{A}_n(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}), \mathsf{B}_n(n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}), \mathsf{C}_n(n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}), \mathsf{D}_n(n \in \mathbb{Z}_{\geq 4})$ と，有限個の例外型 $\mathsf{E}_n(n = 6, 7, 8), \mathsf{F}_4, \mathsf{G}_2$ に分類される．本稿では，ADE 型の Dynkin 図形のみを考えるが，それらはちょうど単純辺だけからなる Dynkin 図形である（上図）．

* E-mail:rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

以下では，記法を固定することも兼ねて Dynkin 図形から対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ がどのように復元されるのか思い出し，その構造と表現論について簡単にまとめておく．$\mathsf{X} = \mathsf{A}, \mathsf{D}, \mathsf{E}$ とし，X_n 型の Dynkin 図形を考える．その頂点集合を $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，2 頂点 $i, j \in I$ が辺で結ばれているとき $i \sim j$ と書く．Cartan 行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき;} \\ -1 & i \sim j \text{ のとき;} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義する．このとき，X_n 型の複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は生成元 $\{e_i, f_i, h_i\}_{i\in I}$ と関係式

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = a_{ij}e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij}f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i,$$
$$\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = \mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0 \quad (i \neq j),$$

で与えられる．ただし，$\mathrm{ad}(x)(y) := [x, y]$ は随伴作用を表す．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ は Lie 括弧 $[x, y]$ を代数における交換子 $xy - yx$ に読み替えて，上記の生成元と関係式を $\mathbb{C}$ 代数の生成元と関係式と思って得られるものに等しい．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現と $\mathbb{C}$ 代数 $U(\mathfrak{g})$ 上の加群とを自然に同一視し，以下区別しない．

Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{C}h_i \subset \mathfrak{g}$ の基底 $\{h_i\}_{i\in I}$ の双対基底 $\{\varpi_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{h}^*$ が生成する自由アーベル群 $\mathsf{P} := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\varpi_i \subset \mathfrak{h}^*$ をウェイト格子と呼ぶ．任意の有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群 M はウェイト空間の直和に分解する：

$$M = \bigoplus_{\lambda\in\mathsf{P}} M_\lambda, \quad M_\lambda := \{v \in M \mid h \cdot v = \lambda(h)v \, (h \in \mathfrak{h})\}.$$

また，$i \in I$ に対応する単純ルートを $\alpha_i := \sum_{j\in I} a_{ij}\varpi_j \in \mathsf{P}$ で定義し，$\mathsf{P} \supset \mathsf{Q} := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i \supset \mathsf{Q}_+ := \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha$ と定義する．随伴表現のウェイト空間分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in\mathsf{Q}} \mathfrak{g}_\alpha$ を考えることにより，ルートの集合 $\mathsf{R} := \{\alpha \in \mathsf{Q} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ および正ルートの集合 $\mathsf{R}_+ := \mathsf{R} \cap \mathsf{Q}_+$ を定義する．$\mathsf{R} = \mathsf{R}_+ \sqcup (-\mathsf{R}_+)$ であり，$\mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_-$) を $\{e_i\}_{i\in I}$ (resp. $\{f_i\}_{i\in I}$) たちの生成する $\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数とすると $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha\in\pm\mathsf{R}_+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ および三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ が成り立つ．各 $\alpha \in \mathsf{R}$ について $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ であり，特に $\dim \mathfrak{n}_\pm = |\mathsf{R}_+|$ である．

有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群のなす圏 $U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ は Weyl の定理より完全可約であり，その単純加群の同型類全体の集合 $\mathsf{Irr}\, U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ は支配的ウェイトの集合 $\mathsf{P}_+ := \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \subset \mathsf{P}$ と $1:1$ 対応する．支配的ウェイト $\lambda \in \mathsf{P}_+$ に対応する単純加群 $V(\lambda)$ は生成ベクトルである最高ウェイトベクトル v と関係式

$$e_i \cdot v = 0, \quad h_i \cdot v = \lambda(h_i)v, \quad f_i^{\lambda(h_i)+1} \cdot v = 0 \quad (\forall i \in I)$$

で定義される．代数 $U(\mathfrak{g})$ には，各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ を満たすような余積 $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ が存在する．これによって 2 つの $U(\mathfrak{g})$ 加群 V, W の $\mathbb{C}$ 上のテンソル積 $V \otimes W$ は再び $U(\mathfrak{g})$ 加群となり，圏 $U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ はモノイダル圏となる．余積の定義から，テンソルの成分を入れ替える線形写像 $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群の同型 $V \otimes W \cong W \otimes V$ を引き起こす．

2.2 量子ループ代数

$\mathbb{C}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，そのループ化とは単に Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ への係数拡大 $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ である．すなわち，Lie 括弧は単に

$$[X \otimes f(t), Y \otimes g(t)] = [X, Y] \otimes f(t)g(t), \quad (X, Y \in \mathfrak{g},\, f(t), g(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$$

で与えられる．ループ化 $L\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の無限次元 Lie 代数とみなし，その $\mathbb{C}$ 上の普遍包絡環を $U(L\mathfrak{g})$ と書く．ADE 型の量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ は，ADE 型有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のループ化 $L\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(L\mathfrak{g})$ に，複素数パラメータ q を入れて変形した代数と思える．以下，1 の冪根ではない $q \in \mathbb{C}^\times$ を固定する．

定義 2.1. $\mathsf{X} = \mathsf{A}, \mathsf{D}, \mathsf{E}$ に対して，X_n 型量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ は（無限個の）生成元

$$\{e_{i,r}, f_{i,r} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}\} \cup \{K_i^{\pm 1} \mid i \in I\} \cup \{h_{i,m} \mid i \in I, m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\}$$

と以下の（無限個の）関係式で与えられる $\mathbb{C}$ 代数である:

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad [K_i, K_j] = [K_i, h_{j,l}] = [h_{i,m}, h_{j,l}] = 0,$$
$$K_i e_{j,r} K_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_{j,r}, \quad K_i f_{j,r} K_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_{j,r},$$
$$(w - q^{\pm a_{ij}} z)\psi_i^{\varepsilon}(z) x_j^{\pm}(w) = (q^{\pm a_{ij}} w - z) x_j^{\pm}(w) \psi_i^{\varepsilon}(z),$$
$$[x_i^+(z), x_i^-(w)] = \frac{\delta_{ij}}{q - q^{-1}} \left(\delta\left(\frac{z}{w}\right) \psi_i^+(w) - \delta\left(\frac{w}{z}\right) \psi_i^-(z) \right),$$
$$(w - q^{\pm a_{ij}} z) x_i^{\pm}(z) x_j^{\pm}(w) = (q^{\pm a_{ij}} w - z) x_j^{\pm}(w) x_i^{\pm}(z),$$

$$\begin{aligned} &\left\{ x_i^{\pm}(z_1) x_j^{\pm}(z_2) x_j^{\pm}(w) - (q + q^{-1}) x_i^{\pm}(z_1) x_j^{\pm}(w) x_i^{\pm}(z_2) + x_j^{\pm}(w) x_i^{\pm}(z_1) x_i^{\pm}(z_2) \right\} \\ &\qquad + \{z_1 \leftrightarrow z_2\} = 0 \quad (i \sim j \text{ のとき}). \end{aligned}$$

ただし，$\varepsilon \in \{+, -\}$ であり，$\delta(z), \psi_i^{\pm}(z), x_i^{\pm}(z)$ は以下で定義される形式的冪級数 $(\in U_q(L\mathfrak{g})[\![z, z^{-1}]\!])$ である:

$$\delta(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} z^r, \quad \psi_i^{\pm}(z) := K_i^{\pm 1} \exp\left(\pm (q - q^{-1}) \sum_{m=1}^{\infty} h_{i,\pm m} z^{\pm m} \right),$$
$$x_i^+(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_{i,r} z^r, \quad x_i^-(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{i,r} z^r.$$

最後の関係式の第 2 項 $\{z_1 \leftrightarrow z_2\}$ は第 1 項から z_1 と z_2 を入れ替えて得られるものを意味する．

生成元 $e_{i,r}, f_{i,r}, h_{i,m}$ はそれぞれループ代数 $L\mathfrak{g}$ の元 $e_i \otimes t^r, f_i \otimes t^r, h_i \otimes t^m$ の対応物であり，生成元 K_i は $q^{h_i \otimes 1}$ と思えるような元である．

本稿では量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元加群のなす圏 $U_q(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ を考える．任意の有限次元 $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群 M は適当な自己同型による捻りを施せば

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathsf{P}} M_\lambda, \quad M_\lambda = \{v \in M \mid K_i \cdot v = q^{\lambda(h_i)} v \, (i \in I)\}$$

という形の分解を持つようにできる．このような分解を持つ加群を **1** 型の加群と呼び，以下では有限次元 **1** 型 $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群全体のなす $\mathbb{C}$ 線形アーベル圏 $\mathcal{C}$ に着目する．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のときとは違い，圏 $\mathcal{C}$ では加群が非自明な拡大を持ち，そのホモロジー代数的性質を明らかにすることは興味深い問題である．

量子ループ代数は余積 $\Delta : U_q(L\mathfrak{g}) \to U_q(L\mathfrak{g}) \otimes U_q(L\mathfrak{g})$ を持つ[*1]．一般の元に対してこれを書き下すことは難しいが，例えば，各 $i \in I$ に対して

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad \Delta(e_{i,0}) = e_{i,0} \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes e_{i,0}, \quad \Delta(f_{i,0}) = f_{i,0} \otimes 1 + K_i \otimes f_{i,0},$$

[*1] これは定義からは全く自明でなく，量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ が量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ （これはアフィン Lie 代数の量子包絡環であり，有限表示を持つ Hopf 代数）のレベル 0 に対応する商であるという事実を用いる．特に，量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ の表現は同時に量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のレベル 0 表現でもある．

などが成り立つ．最初の式から，**1** 型加群はテンソル積に関して閉じている，すなわち圏 $\mathcal{C}$ は圏 $U_q(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ のモノイダル部分圏になっていることがわかる．2 番目と 3 番目の式からこの余積は余可換ではないので，加群 $V, W \in \mathcal{C}$ に対してテンソル成分の入れ替えは $V \otimes W$ と $W \otimes V$ の間の同型を引き起こさない．実際，一般に $V \otimes W$ と $W \otimes V$ は $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群として同型でない．しかし興味深いことに，それらの組成因子は重複度込みで一致し，Grothendiek 環 $K(\mathcal{C})$ は可換であることが知られている．

2.3 単純加群の分類

圏 $\mathcal{C}$ の単純加群の分類定理を述べる．

定理 2.2 (Chari-Pressley [1])**.** 任意の単純加群 $L \in \mathcal{C}$ に対し，1 次元部分空間 $\mathbb{C}v \subset L$ と定数項 1 の多項式の I 組 $\pi = (\pi_i(u))_{i \in I} \in (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ が一意的に存在して，以下の 3 つの条件[*2]を満たす：

(1) $e_{i,r} \cdot v = 0 \quad (i \in I, r \in \mathbb{Z})$;
(2) $K_i \cdot v = q^{\lambda(h_i)} v \quad (i \in I)$;
(3) $L[\![z^{\pm 1}]\!]$ において，$\psi_i^{\pm}(z) \cdot v = q^{\lambda(h_i)} \left[\dfrac{\pi_i(q^{-2}z)}{\pi_i(z)} \right]_{z^{\pm 1}=0} v \quad (i \in I)$.

ただし，ここで $\lambda := \sum_{i \in I} (\deg \pi_i) \varpi_i \in \mathsf{P}_+$ と定義し，$[\cdot]_{z^{\pm 1}=0}$ は $z^{\pm 1} = 0$ における形式的冪級数展開を表す．さらに，このとき $L = L(\pi)$ と書くことにすると，対応 $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C} \ni L(\pi) \mapsto \pi \in (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ は $1:1$ である．

定理に現れた多項式の I 組 $\pi \in (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ を Drinfeld 多項式と呼ぶ．また条件 $(1), (2), (3)$ を満たすベクトル v で生成される $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群を ℓ 最高ウェイト加群，そのとき生成ベクトル v を ℓ 最高ウェイトベクトルとよぶ．ここで，ℓ はループを意味する．上記定理 2.2 は圏 $\mathcal{C}$ の単純加群が ℓ 最高ウェイトで分類されることを主張しており，これは $U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ における単純加群の分類の類似である．

2.4 局所/大域 Weyl 加群

$$\begin{tikzcd}
 & M(\pi) = \dfrac{U_q(L\mathfrak{g})v}{\langle (1),(2),(3) \rangle} \arrow[dl, "\text{唯一単純商}"'] \arrow[d, two heads, "\text{最大有限次元商}"] & \mathbb{M}(\lambda) = \dfrac{U_q(L\mathfrak{g})v}{\langle (1),(2) \rangle} \arrow[l, two heads, "/(3)"'] \arrow[d, two heads, "\text{最大可積分商}"] \\
L(\pi) & W(\pi) \arrow[l, two heads] & \mathbb{W}(\lambda) \arrow[l, two heads, "/\mathfrak{r}_\pi"']
\end{tikzcd}$$

ここでは Chari-Pressley [2] に従って，単純加群の ℓ 最高ウェイトによる特徴付けと関連して局所および大域 Weyl 加群と呼ばれる $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群を定義する．これらは箙多様体の同変 K 群を用いて幾何学的に実現できる加群でもある（次節参照）．

まず，生成ベクトル v から定理 2.2 の条件 $(1), (2), (3)$ だけで定義される無限次元の普遍 ℓ 最高ウェイト加群 $M(\pi)$ を考える．これは有限次元単純加群 $L(\pi) \in \mathcal{C}$ をただ一つの単純商に持つが，$M(\pi)$ は無限次元なので圏 $\mathcal{C}$ に属さない．そこで，局所 Weyl 加群 (local Weyl module) を $M(\pi)$ の最大の有限次元商 $W(\pi) \in \mathcal{C}$ として定義する．局所 Weyl 加群 $W(\pi)$ は，結果としては生成ベクトル v と関係式 $(1), (2), (3)$ に加えてもうひとつの条件

$$f_{i,r}^{\lambda(h_i)+1} \cdot v = 0 \quad (i \in I, r \in \mathbb{Z}) \tag{2.1}$$

を課して定義される加群と同型になる．

一方，生成ベクトル v から定理 2.2 の条件のうち $(1), (2)$ のみを関係式として定義される加群 $\mathbb{M}(\lambda)$[*3]を考

[*2] 実は条件 (2) は条件 (3) から従うのだが，説明の都合上敢えて分けて書いた．
[*3] 加群 $\mathbb{M}(\lambda)$ および大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ は Drinfeld 多項式の次数 $\lambda \in \mathsf{P}_+$ のみで決まることに注意する．

え，加群 $\mathbb{M}(\lambda)$ の最大可積分[*4]商加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ を大域 Weyl 加群 (global Weyl module) と呼ぶ．大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ は無限次元であり，結果としては条件 (1), (2) に条件 (2.1) を付け加えて定義される加群に同型である．Chari-Pressley [2] および中島 [9] により，

$$R_\lambda := \mathrm{End}_{U_q(L\mathfrak{g})}(\mathbb{W}(\lambda)) \cong \bigotimes_{i\in I} \mathbb{C}[z_{i,1}^{\pm1}, \ldots, z_{i,\lambda(h_i)}^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_{\lambda(h_i)}}$$

であり，$\mathbb{W}(\lambda)$ は R_λ 加群として有限階数自由であることが知られている．特に，環 R_λ の極大イデアルの集合 $\mathrm{Specm}(R_\lambda) \cong (\mathbb{C}^\times)^\lambda := \prod_{i\in I}(\mathbb{C}^\times)^{\lambda(h_i)}/\mathfrak{S}_{\lambda(h_i)}$ は対応 $(\mathbb{C}^\times)^\lambda \ni [(c_{i,1}, \ldots, c_{i,\lambda(h_i)})]_{i\in I} \leftrightarrow \left(\prod_{j=1}^{\lambda(h_i)}(1-c_{i,j}u)\right)_{i\in I} \in (1+u\mathbb{C}[u])^I$ によって，次数 λ の Drinfeld 多項式の集合と同一視できる．次数 λ の Drinfeld 多項式 π に対応する R_λ の極大イデアルを $\mathfrak{r}_\pi$ と書くことにすると，局所 Weyl 加群 $W(\pi)$ は大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ のイデアル $\mathfrak{r}_\pi$ による商と同型になる．別の言い方をすれば，大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ を空間 $(\mathbb{C}^\times)^\lambda$ 上のベクトル束と思ったとき，局所 Weyl 加群 $W(\pi)$ は点 π におけるファイバーである．

ここで $\widehat{R}_\pi := \varprojlim_k R_\lambda/\mathfrak{r}_\pi^k$ とし，大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ の点 π における完備化 $\widehat{W}(\pi) := \mathbb{W}(\lambda) \otimes_{R_\lambda} \widehat{R}_\pi$ を変形 Weyl 加群と呼ぶことにする．これは本稿の主定理において役割を演ずる．

2.5 箙多様体と量子ループ代数

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}(\lambda) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{M}(\lambda) \arrow[d, "\pi"] \\ \{0\} \arrow[r, hook] & \mathfrak{M}_0(\lambda) \end{tikzcd}$$

ここでは量子ループ代数の表現を箙多様体を用いて実現することについて概略のみごく簡単に述べる．正確な定義など詳細は中島の原論文 [9] を参照していただきたい．

各支配的ウェイト $\lambda \in \mathsf{P}_+$ に対して，箙多様体 (quiver variety) と呼ばれる 2 種類の $\mathbb{C}$ 上の代数多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)$ と $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ が定義される．実際には，多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)$ は非特異準射影的多様体の直和 $\bigsqcup_{\nu\in\mathsf{Q}_+}\mathfrak{M}(\nu,\lambda)$ として，多様体 $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ は（一般には特異点を持った）アフィン多様体の和 $\bigcup_{\nu\in\mathsf{Q}_+}\mathfrak{M}_0(\nu,\lambda)$ として構成される．多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)$ と $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ には線形代数群 $\mathbb{G}(\lambda) := \prod_{i\in I} GL_{\lambda(h_i)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ の作用が入り，$\mathbb{G}(\lambda)$ 同変な固有射 $\pi\colon \mathfrak{M}(\lambda) \to \mathfrak{M}_0(\lambda)$ が存在する．また，多様体 $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ には原点 0 があり，その π による逆像を $\mathfrak{L}(\lambda)$ と書いて中心ファイバー (central fiber) と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} \displaystyle\bigsqcup_{0\le k\le l} \mathrm{Gr}(k,l) \arrow[r, hook, "\text{零切断}"] \arrow[d] & \displaystyle\bigsqcup_{0\le k\le l} T^*\mathrm{Gr}(k,l) \arrow[d, "\pi"] \\ \{0\} \arrow[r, hook] & \{x \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^l) \mid x^2 = 0\} \end{tikzcd}$$

以上のことを最もシンプルな A_1 型の場合に述べる．$I = \{1\}$ であるから $\varpi = \varpi_1$, $\alpha = \alpha_1$ と略して書く．$\lambda = l\varpi \in \mathsf{P}_+$, $\nu = k\alpha \in \mathsf{Q}_+$ に対して，多様体 $\mathfrak{M}(\nu,\lambda)$ は Grassmann 多様体の余接束 $T^*\mathrm{Gr}(k,l)$ であり，$\mathfrak{M}_0(\lambda) = \{x \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^l) \mid x^2 = 0\}$ である．$T^*\mathrm{Gr}(k,l) = \{(x,V) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^l) \times \mathrm{Gr}(k,l) \mid x(\mathbb{C}^l) \subset V, x(V) = 0\}$ という同一視の下で固有射 π は第 1 成分の射影である．したがって，中心ファイバー $\mathfrak{L}(\lambda)$ は Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(k,l)$ の直和となる．群 $\mathbb{G}(\lambda) = GL(\mathbb{C}^l) \times \mathbb{C}^\times$ の $T^*\mathrm{Gr}(k,l)$ への作用は $GL(\mathbb{C}^l)$ の自然な作用 $g\cdot(x,V) = (gxg^{-1}, gV)$ と $\mathbb{C}^\times$ のファイバー方向のスカラー倍作用の直積である．

さて，一般にある線形代数群 G の作用つき多様体 X に対し，その同変 K 群，すなわち X 上の G 同変連接層のなすアーベル圏 $\mathrm{Coh}^G(X)$ の Grothendiek 群 $K(\mathrm{Coh}^G(X))$ を $K^G(X)$ と書く．多様体 X が 1 点 pt のとき $\mathrm{Coh}^G(\mathrm{pt})$ とは G の有限次元表現のなす圏 $\mathrm{Rep}(G)$ であり，$K^G(\mathrm{pt})$ は G の表現環 $R(G)$ に等しい．表現 $V \in \mathrm{Rep}(G)$ を G 多様体 X 上の G 同変自明束とみなして，$[V] \in R(G)$ と $[\mathcal{F}] \in K^G(X)$ との積を

[*4] 各 $e_{i,r}, f_{i,r}$ が局所冪零に作用すること．量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のレベル 0 表現と思ったときの可積分性と同値である．

$[V]\cdot[\mathcal{F}] := [V\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}]$ と定めることで，同変 K 群 $K^G(X)$ は $R(G)$ 加群になる．

以下，箙多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)\to\mathfrak{M}_0(\lambda)$ の設定で，群 G としては $\mathbb{G}(\lambda)$ を考える．標準的に $A := R(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$, $R(GL_k(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[z_1^{\pm 1},\dots,z_k^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_k}$ とみなすとき，$R(\mathbb{G}(\lambda)) \cong \bigotimes_{i\in I} A[z_{i,1}^{\pm 1},\dots,z_{i,\lambda(h_i)}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{\lambda(h_i)}}$ と同一視できることに注意する（テンソル積は A 上とっている）．不定元 $v\in A$ を，量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ を定義するときに固定したパラメータ $q\in\mathbb{C}$ へ特殊化することで $\mathbb{C}$ を A 代数とみなす．前節の R_λ は $R_\lambda = R(\mathbb{G}(\lambda))\otimes_A\mathbb{C}$ と同一視できることに注意する．任意の $\mathbb{G}(\lambda)$ 作用付き多様体 X に対して $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(X) := K^{\mathbb{G}(\lambda)}(X)\otimes_A\mathbb{C}$ と書くことにする．これは R_λ 加群である．

さて，箙多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)\to\mathfrak{M}_0(\lambda)$ から Steinberg 型多様体 $Z(\lambda) := \mathfrak{M}(\lambda)\times_{\mathfrak{M}_0(\lambda)}\mathfrak{M}(\lambda)$ を構成し，その同変 K 群 $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ を考える．畳み込み (convolution) によって K 群 $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ には R_λ 代数の構造が入る．このとき中心ファイバーの同変 K 群 $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(\mathfrak{L}(\lambda))$ は代数 $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ 上の加群となる．

定理 2.3 (中島 [9])**.** 各 $\lambda\in\mathsf{P}_+$ に対して，$\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\Phi_\lambda : U_q(L\mathfrak{g})\to\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ が存在して，引き戻しで得られる $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群 $\Phi_\lambda^*(\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(\mathfrak{L}(\lambda)))$ は大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ と同型である．この同型は，両辺の R_λ 作用と整合的である．

注意 2.4. 準同型 Φ_λ は一般には全射でも単射でもない．本稿の主定理 4.2 では，特別な状況でこの準同型の性質についてより深く考察する．

3 Dynkin 箙の表現と Hernandez-Leclerc 圏 $\mathcal{C}_Q$

この節の目標は，Dynkin 箙の表現論を用いてモノイダル部分圏 $\mathcal{C}_Q\subset\mathcal{C}$ を定義することである．

3.1 箙の表現と Gabriel の定理

箙 (quiver) とは有向グラフのことである．すなわち，頂点の集合 I と矢の集合 Ω の組 $Q=(I,\Omega)$ であって，各矢 $a\in\Omega$ に対してその始点 $a'\in I$ と終点 $a''\in I$ が定まっている．以下，集合 I と Ω は有限であるとする．箙 Q の（$\mathbb{C}$ 上の）表現とは，各頂点 $i\in I$ ごとに $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V_i を与え，各矢 $a\in\Omega$ ごとに線形写像 $f_a\in\mathrm{Hom}(V_{a'},V_{a''})$ を与えて得られるデータ $((V_i)_{i\in I},(f_a)_{a\in\Omega})$ である．

箙 $Q=(I,\Omega)$ に対して，矢の有限列 $p=(a_1,a_2,\dots,a_l)$ で，$a_k{}'' = a_{k+1}{}'\,(1\le k<l)$ を満たすものを頂点 $a_1{}'$ から頂点 $a_l{}''$ への道 (path) といい，このとき l を道 p の長さという．各矢 $a\in\Omega$ は長さ 1 の道と見なす．長さ 0 の道も考え，頂点 i から i への長さ 0 の道を ϵ_i と書く．箙 Q の道代数とは，道全体の集合でラベルされた基底を持つ $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathbb{C}Q=\bigoplus_p\mathbb{C}p$ 上に，「2 つの道が結合可能な時は結合し，結合可能でないときは 0 とする」という規則[*5] で積を定義した結合的 $\mathbb{C}$ 代数である．

道代数 $\mathbb{C}Q$ 上の加群 V に対して，$V_i := \epsilon_i V$ とし，矢 a の作用を $f_a : V_{a'}\to V_{a''}$ とすれば，箙 Q の表現 $((V_i),(f_a))$ を得る．逆に箙 Q の表現から $\mathbb{C}Q$ 加群を得ることも容易である．これによって箙の表現と道代数上の加群を同一視し，以下区別しない．有限次元 $\mathbb{C}Q$ 加群 $V\in\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ に対し，その次元ベクトルを $\underline{\dim}V := (\dim V_i)_{i\in I}\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^I$ で定義する．与えられた $\underline{d}=(d_i)_{i\in I}\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^I$ に対し，群作用付き線形空間

$$E_{\underline{d}} := \bigoplus_{a\in\Omega}\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{d_{a'}},\mathbb{C}^{d_{a''}}) \quad \curvearrowleft \quad G_{\underline{d}} := \prod_{i\in I} GL(\mathbb{C}^{d_i})$$

*5 まじめに書くと $(a_1,\dots,a_l)\cdot(a_{l+1},\dots,a_{l+m}) = \delta_{a_l{}'',a_{l+1}{}'}(a_1,\dots,a_{l+m})$, $\epsilon_i\cdot\epsilon_j=\delta_{ij}\epsilon_i$, $\epsilon_i\cdot(a_1,\dots,a_l) = \delta_{i,a_1{}'}(a_1,\dots a_l)$, $(a_1,\dots,a_l)\cdot\epsilon_i = \delta_{a_l{}'',i}(a_1,\dots a_l)$.

を考える．群 $G_{\underline{d}}$ の作用は共役 $(g_i)_{i\in I} : (f_a)_{a\in\Omega} \mapsto (g_{a''} \circ f_a \circ g_{a'}^{-1})_{a\in\Omega}$ で与えられる．空間 $E_{\underline{d}}$ は $\underline{\dim} V = \underline{d}$ なる $V \in \mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ 全体の集合と思えて，群 $G_{\underline{d}}$ の作用は表現の間の同型に対応する．したがって，空間 $E_{\underline{d}}$ 上の $G_{\underline{d}}$ 軌道の集合 $E_{\underline{d}}/G_{\underline{d}}$ は次元ベクトル $\underline{d}$ の表現の同型類全体の集合と $1:1$ に対応する．

定理 3.1 (Gabriel の定理). (1) 箙 Q が有限型，すなわち任意の $\underline{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ に対して $|E_{\underline{d}}/G_{\underline{d}}| < \infty$ が成り立つための必要十分条件は，Q が Dynkin 箙であるとき，すなわち Q から向き付けを忘れて得られるグラフが ADE 型の Dynkin 図形に等しいときである．

(2) Q が Dynkin 箙のとき，対応する型のルート系の記号を用いて全単射 $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^I \ni \underline{d} \leftrightarrow \sum_{i\in I} d_i\alpha_i \in \mathsf{Q}_+$ を定め，$(\mathbb{Z}_{\geq 0})^I$ と Q_+ を同一視する．このとき，次元ベクトルをとる操作は $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ の直既約加群の同型類集合と正ルートの集合 $\mathsf{R}_+ \subset \mathsf{Q}_+$ の間の $1:1$ 対応を引き起こす．

以下，Dynkin 箙 Q をひとつ固定する．定理 3.1 (2) より各正ルート $\alpha \in \mathsf{R}_+$ に対し $\underline{\dim} M_\alpha = \alpha$ なる直既約加群 $M_\alpha \in \mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ が同型を除いてただ一つ存在する．任意の $M \in \mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ が直既約加群たちの一意的な有限直和に同型であること（Krull-Schmidt の定理）と次元ベクトル $\underline{\dim}$ の加法性から次がわかる．

系 3.2. 対応 $\left[\bigoplus_{\alpha\in\mathsf{R}_+} M_\alpha^{\oplus m_\alpha}\right] \leftrightarrow (m_\alpha)$ は Dynkin 箙 Q の次元ベクトル β の表現の同型類全体の集合と，β の Kostant 分割の集合 $\mathrm{KP}(\beta) := \{(m_\alpha) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathsf{R}_+} \mid \sum_\alpha m_\alpha \alpha = \beta\}$ の間の $1:1$ 対応を与える．特に，$\beta = \sum_{i\in I} d_i\alpha_i$ のとき，空間 $E_{\underline{d}}$ の $G_{\underline{d}}$ 軌道は集合 $\mathrm{KP}(\beta)$ でラベル付けられる．

3.2 Auslander-Reiten 箙

一般に，Krull-Schmidt 性を持つ $\mathbb{C}$ 線形圏 $\mathcal{A}$*6 に対してその Auslander-Reiten(AR) 箙とは以下のように定義される箙 $\Gamma(\mathcal{A})$ である：

- $\Gamma(\mathcal{A})$ の頂点集合は圏 $\mathcal{A}$ の直既約対象の同型類全体である；
- $\Gamma(\mathcal{A})$ において，直既約加群 X（の同型類）から Y（の同型類）への矢の数は X から Y への既約射の空間*7の次元に等しい．

この節では固定した Dynkin 箙 Q に対して，導来圏 $D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ の AR 箙の記述を紹介する．最初に $D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ の直既約対象の同型類集合が $\{M_\alpha[k] \mid \alpha \in \mathsf{R}_+, k \in \mathbb{Z}\}$ であることに注意する．ここで，$M_\alpha[k]$ は stalk 複体，すなわち以下で定義される：

$$H^i(M_\alpha[k]) := \begin{cases} M_\alpha & i = k \text{ のとき;} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

Dynkin 箙 $Q = (I, \Omega)$ に対して，その高さ関数，すなわち写像 $\xi : I \to \mathbb{Z}$ であって $\xi_{a'} = \xi_{a''} + 1$ が任意の矢 $a \in \Omega$ に対して成り立つようなものをひとつ取って固定する．ADE 型 Dynkin 図形が連結木であることから，そのような ξ は一斉に定数を加える不定性を除いて一意的に存在する．このとき，箙 Q の反復箙 (repetition quiver) $\widehat{Q} = (\widehat{I}, \widehat{\Omega})$ を以下で定義される無限箙とする：

$$\widehat{I} := \{(i,p) \in I \times \mathbb{Z} \mid p - \xi_i \in 2\mathbb{Z}\}, \qquad \widehat{\Omega} := \{(i,p) \to (j, p+1) \mid (i,p) \in \widehat{I}, i \sim j\}^{*8}.$$

---

*6 各 2 対象についてその間の射の集合が有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間であることも仮定する．

*7 不可逆（section でも retraction でもない）かつ 2 つの不可逆射の合成では書けない射のなすベクトル空間（と思いたいもの）．

*8 この定義より反復箙 $\widehat{Q}$ 自身は Q の向き付け Ω には依存しない．

例えば，下図は A_3 型の反復箙を示している．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{} \arrow[dr] & & (3,-2) \arrow[dr] & & (3,0) \arrow[dr] & & (3,2) \arrow[dr] & & (3,4) \arrow[dr] & \\
\cdots & (2,-3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
{} \arrow[ur] & & (1,-2) \arrow[ur] & & (1,0) \arrow[ur] & & (1,2) \arrow[ur] & & (1,4) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

定理 3.3 (cf. [4])**.** 各高さ関数 ξ に対して，箙の同型 $\phi : \widehat{Q} \xrightarrow{\cong} \Gamma(D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}))$ であって，各 $i \in I$ について $\phi(I_i[0]) = (i, \xi_i)$ を満たすものがただ一つ存在する．ここで $I_i \in \mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ は単純加群 M_{α_i} の移入包絡 (injective hull) である．

この同型をアーベル圏（標準的 t 構造の中心）$\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \subset D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ に制限することによって，単射 $\mathsf{R}_+ \ni \alpha \mapsto \phi(\alpha) := \phi(M_\alpha[0]) \in \widehat{I}$ を得る．これは箙の向き付けに依存する．

例 3.4. A_3 型の場合．$\mathsf{R}_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, (\alpha_1 + \alpha_2), (\alpha_2 + \alpha_3), (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\}$ である．

(1) $Q = (1 \to 2 \to 3)$ で高さ関数が $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2, 1, 0)$ であるとき，ϕ は下図のようになる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \arrow[dr] & & & & & & (3,0) \arrow[dr] & & \\
 & \alpha_2+\alpha_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \alpha_1+\alpha_2 \arrow[dr] & & \overset{\phi}{\mapsto} & & (2,-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,1) \arrow[dr] & \\
\alpha_3 \arrow[ur] & & \alpha_2 \arrow[ur] & & \alpha_1 & & (1,-2) \arrow[ur] & & (1,0) \arrow[ur] & & (1,2)
\end{tikzcd}
$$

(2) $Q = (1 \to 2 \leftarrow 3)$ で高さ関数が $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2, 1, 2)$ であるとき，ϕ は下図のようになる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \alpha_1+\alpha_2 \arrow[dr] & & \alpha_3 & & & (3,0) \arrow[dr] & & (3,2) \\
\alpha_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \overset{\phi}{\mapsto} & (2,-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,1) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \alpha_2+\alpha_3 \arrow[ur] & & \alpha_1 & & & (1,0) \arrow[ur] & & (1,2)
\end{tikzcd}
$$

3.3 Hernandez-Leclerc 圏 $\mathcal{C}_Q$

以上の準備の下で圏 $\mathcal{C}$ のモノイダル部分圏 $\mathcal{C}_Q$ を定義しよう．集合 $\widehat{I}$ が生成する自由モノイド $\mathscr{P}_+ := \mathbb{Z}_{\geq 0}\widehat{I}$ および，部分集合 $\phi(\mathsf{R}^+) \subset \widehat{I}$ が生成するその部分モノイド $\mathscr{P}_+^0 \subset \mathscr{P}_+$ を考える．対応

$$
\mathscr{P}_+ \to (1 + u\mathbb{C}[u])^I ; \quad \sum_{(i,p) \in \widehat{I}} l_{i,p}(i,p) \mapsto \left(\prod_p (1 - q^p u)^{l_{i,p}} \right)_{i \in I}
$$

によってこれらを Drinfeld 多項式の集合 $(1 + u\mathbb{C}[u])^I$ （これは多項式の積に関するモノイド）の部分モノイドとみなす．定理 2.2 を用いて $\mathsf{Irr}\, \mathcal{C} = (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ と同一視する．このとき，圏 $\mathcal{C}$ の Serre 充満部分圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathcal{C}_Q$) を $\mathsf{Irr}\, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}} = \mathscr{P}_+$ (resp. $\mathsf{Irr}\, \mathcal{C}_Q = \mathscr{P}_+^0$) を満たすものとして定義する．大雑把に言えば圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ は圏 $\mathcal{C}$ から導来圏 $D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ に対応する部分として切り出された部分圏であり，圏 $\mathcal{C}_Q$ は圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ の中でさらにアーベル圏 $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \subset D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ に対応する部分圏である．

さて，次の定理によって圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ は圏 $\mathcal{C}$ のモノイダル圏としての骨格にあたる部分だと思える．

定理 3.5 (cf. [5])**.** 圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ は圏 $\mathcal{C}$ のモノイダル部分圏であり，環として $K(\mathcal{C}) \cong \bigotimes_{a \in \mathbb{C}^\times/q^{2\mathbb{Z}}} K(\tau_a^* \mathcal{C}_{\mathbb{Z}})$ と分解する．ただし，τ_a は $U_q(L\mathfrak{g})$ の自己同型で $\tau_a^* L(\pi(u)) \cong L(\pi(au))$ を引き起こすものである．

冪零部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{g}$ を Lie 代数に持つ冪単代数群を N_+ と書く．次の定理は圏 $\mathcal{C}_Q$ が N_+ の座標環 $\mathbb{C}[N_+]$ の圏化 (categorification) を与えることを示している．

定理 3.6 (Hernandez-Leclerc [6])**.** 圏 $\mathcal{C}_Q$ は圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ のモノイダル部分圏である．さらに，環の同型 $K(\mathcal{C}_Q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[N_+]$ であって，$\mathcal{C}_Q$ の単純対象の類全体と $\mathbb{C}[N_+]$ の双対標準基底 (dual canonical basis)[*9]の間の $1:1$ 対応を引き起こすものが存在する．

したがって，圏 $\mathcal{C}_Q$ のモノイダル圏構造は座標環 $\mathbb{C}[N_+]$ における双対標準基底の元の積に関する振る舞いによってある程度理解される．そして，その部分を記述するのが $\mathbb{C}[N_+]$ の団代数 (cluster algebra) 構造であると見ることができる．

4 主定理とその応用

4.1 圏 $\mathcal{C}_Q$ と箙多様体

対応 $\mathrm{KP}(\beta) \ni (m_\alpha) \mapsto \sum_\alpha m_\alpha \phi(\alpha) \in \mathscr{P}_+^0$ によって，集合 $\mathrm{KP}(\beta)$ をモノイド $\mathscr{P}_+^0$ の部分集合とみなす．この同一視の下で，$\mathscr{P}_+^0 = \bigsqcup_{\beta \in \mathsf{Q}_+} \mathrm{KP}(\beta)$ と書くことができ，この分解は $\mathrm{KP}(\beta) + \mathrm{KP}(\beta') \subset \mathrm{KP}(\beta + \beta')$ を満たす．圏 $\mathcal{C}_{Q,\beta}$ を $\mathsf{Irr}\, \mathcal{C}_{Q,\beta} = \mathrm{KP}(\beta)$ を満たす圏 $\mathcal{C}_Q$ の Serre 充満部分圏とする．このとき，直和分解 $\mathcal{C}_Q \cong \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} \mathcal{C}_{Q,\beta}$ が成り立ち，モノイダル構造に関して $\mathcal{C}_\beta \otimes \mathcal{C}_{\beta'} \subset \mathcal{C}_{\beta+\beta'}$ が示される[*10]．以下 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ を固定し，直和因子 $\mathcal{C}_{Q,\beta}$ に焦点をあてることにする．

固定した元 $\beta = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in \mathsf{Q}_+$ に対して，対応 ϕ を用いて $\pi := \sum_{i \in I} d_i \phi(\alpha_i) \in \mathscr{P}_+^0 \subset (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ と定義する．この π を Drinfeld 多項式 $(\pi_i(u))_{i \in I}$ だと思ってその次数部分 $\lambda := \sum_{i \in I} (\deg \pi_i) \varpi_i \in \mathsf{P}_+$ を取り出し，定理 2.3 を思い出して対応する準同型 $\Phi_\lambda : U_q(L\mathfrak{g}) \to \mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ を考える．そして $\widehat{R}_\beta := \varprojlim_k R_\lambda / \mathfrak{r}_\pi^k$ とおいて，準同型 Φ_λ の完備化

$$\widehat{\Phi}_\beta : U_q(L\mathfrak{g}) \to \mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda)) \to \mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda)) \otimes_{R_\lambda} \widehat{R}_\beta =: \widehat{\mathcal{K}}_\beta$$

を考察する．$R_\lambda = R(\mathbb{G}(\lambda)) \otimes_A \mathbb{C}$ に注意して，$\mathbb{G}(\lambda)$ の 1 次元部分トーラス $T (\cong \mathbb{C}^\times) \subset \mathbb{G}(\lambda)$ で，$\mathfrak{r}_\pi$ に対応するものをひとつとる．局所化定理により，$\mathfrak{r}_\pi$ に対応する完備化を調べる際には，箙多様体 $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ の T 固定部分 $\mathfrak{M}_0(\lambda)^T$ とその上の T の $\mathbb{G}(\lambda)$ における中心化群（これは $G_{\underline{d}} \times T$ と同型）の作用が重要である．

興味深いことに，今の設定では次が成り立つ．

定理 4.1 (Hernandez-Leclerc [6])**.** $G_{\underline{d}}$ 同変同型 $\mathfrak{M}_0(\lambda)^T \cong E_{\underline{d}}$ が存在する．

空間 $E_{\underline{d}}$ とその上の $G_{\underline{d}}$ 作用は Gabriel の定理を用いて記述することができ（系 3.2），それを用いて準同型 $\widehat{\Phi}_\beta$ を詳しく解析することが可能である．その結果として以下の定理を示すことができる．

[*9] 量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ を用いて Lusztig, 柏原によって定義された良い基底．

[*10] これは Grothendiek 環のウェイト分解 $\mathbb{C}[N_+] = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} \mathbb{C}[N_+]_\beta$ に対応している．

定理 4.2 (F. [3]). (1) 準同型 $\widehat{\Phi}_\beta : U_q(L\mathfrak{g}) \to \widehat{\mathcal{K}}_\beta$ による引き戻しは，有限次元加群圏上で圏同値 $\widehat{\mathcal{K}}_\beta\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \cong \mathcal{C}_{Q,\beta}$ を引き起こす．これによって圏 $\mathcal{C}_{Q,\beta}$ を有限生成加群圏 $\widehat{\mathcal{C}}_{Q,\beta} := \widehat{\mathcal{K}}_\beta\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ の充満部分圏とみなせる．

(2) 圏 $\widehat{\mathcal{C}}_{Q,\beta}$ は箙多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)^T \to E_{\underline{d}}$ の幾何学的性質を反映して，アフィン最高ウェイト構造[*11] と呼ばれる良いホモロジー代数的構造を持つ．例えば，圏 $\widehat{\mathcal{C}}_{Q,\beta}$ は大域次元有限であり，任意の射影加群は変形局所 Weyl 加群たちによる有限長のフィルトレーションを持つ．

4.2 応用：Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性

A 型の古典的な Schur-Weyl 双対性の量子ループ版として $U_q(L\mathfrak{sl}_n)$ と GL 型アフィン Hecke 環の有限次元加群圏の間には良い関手を構成することができ，適当な充満部分圏の間の圏同値を引き起こすことが知られている（量子アフィン Schur-Weyl 双対性）．この構成を ADE へ一般化する形で，Kang-柏原-Kim [7] は任意の Dynkin 箙 Q に付随して，対応する箙 Hecke 環[*12]の有限次元加群圏と量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ の圏 $\mathcal{C}_Q$ との間に良いモノイダル完全関手を構成し，単純加群の同型類の上では 1 : 1 対応与えることを示した．この状況で，主定理 4.2 を応用して加群圏の構造を比較することにより，Kang-柏原-Kim の関手が圏同値であることを示すことができる ([3])．

参考文献

[1] V. Chari and A. Pressley. Quantum affine algebras and their representations. *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, 59–78, CMS Conf. Proc., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[2] V. Chari and A. Pressley. Weyl modules for classical and quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 5:191–223, 2001.

[3] R. Fujita. Affine highest weight categories and quantum affine Schur-Weyl duality of Dynkin quiver types. preprint. arXiv:1710.11288.

[4] D. Happel. Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. *Cambridge University Press*, 1988.

[5] H. Hernandez and B. Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 154(2):265–341, 2010.

[6] H. Hernandez and B. Leclerc. Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 701:77–126, 2015.

[7] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras, II. *Duke Math. J.*, 164(8):1549–1602, 2015.

[8] A. Kleshchev. Affine highest weight categories and affine quasi-hereditary algebras. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(4):841–882, 2015.

[9] H. Nakajima. Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(1):145–238, 2001.

[*11] 定義や基本的な性質については [8] を参照．

[*12] その加群圏が量子包絡環の圏化を与えるという点において，GL 型アフィン Hecke 環の一般化と思えるような代数である．Khovanov-Lauda-Rouquier 代数とも呼ばれる．