

体心立方格子上の最近接自己回避歩行に対するレース展開

北海道大学大学院理学院数学専攻

上島 芳倫 (Yoshinori KAMIJIMA) *

共同研究者：坂井 哲 准教授, 半田 悟 氏

1 はじめに

1.1 研究背景

最近接自己回避歩行 (nearest-neighbour self-avoiding walk, 以下 SAW) は単純ランダムウォーク (simple random walk, 以下 RW) に自分自身の経路と交わらないという条件を加えたモデルである。これは、自然科学や確率論的統計力学モデルにおいて重要な概念である、相転移・臨界現象を示す。相転移はこの世のさまざまな物質で観察される現象である。例えば水 (H_2O) は、常温で液体の水であって、 0°C で氷に変化し、 100°C で水蒸気に変化することはよく知られている。他にも、鉄 (Fe) は常温で強磁性を示すが、 770°C を境にして常磁性を示す。一般に、巨視的なスケールで物質の性質が一様な状態を相と呼ぶ。物質の巨視的な性質は、ある限られた数のパラメータにより特徴づけられることが知られている。これらのパラメータを変化させることで、物質は相転移を生じる。

H_2O の場合は気相と液相、 Fe の場合は強磁性相と常磁性相の間に、各相が区別できなくなる点がある。これを臨界点と呼ぶ。臨界点の近傍では臨界現象という、物理量に特異性を示す現象が起きること。すなわち、物理量が不連続になったり発散したりする。その漸近的な振る舞いは $(T - T_c)^\beta$ のように冪乗則で特徴づけられる。ここに現れた β を臨界指数という。当然のことながら、臨界点の値 T_c は物質ごとに異なる。しかし臨界指数は、物質の種類によらない、普遍性をもつことが実験的に知られている。

SAW においても臨界指数が定義される。特にその臨界指数は、SAW を考える空間の次元 d に依存して変わる。この場合「臨界指数の普遍性」は、考えている空間（格子の形）によらずモデルの対称性や次元にのみよって決まること、を意味する。臨界指数を具体的に求めることは、低次元では難しい問題であり、数学的に厳密な理解があまり進んでいない。一方で高次元では、臨界指数が平均場臨界指数と呼ばれる簡単な値に退化することが知られている。このとき、退化するぎりぎりの次元 d_c を（上部）臨界次元という。SAW の臨界次元は経験的に $d_c = 4$ であると予想されている。現在のところ、数学的に厳密に証明されているのは $d \geq 5$ の場合である。それは原と Slade[3, 4] によって示された。その論文で用いられた手法がレース展開である。

レース展開はもともと 1985 年に Brydges と Spencer[1] によって導入された。現在この手法は SAW に限らず、percolation や lattice tree と lattice animal, contact processes, Ising model といった、あらゆる確率論的統計力学モデルに対して応用されている。そのため、確率論的統計力学モデルに対する高次元臨界現象を解析する強力な手法となっている。

* s153009@math.sci.hokudai.ac.jp or ykami@eis.hokudai.ac.jp

1.2 研究目的

SAW では $d \geq 5$ で臨界指数が平均場臨界指数に退化することを証明できた、と述べた。しかし、その証明は [3] と [4] で合わせて 120 ページ以上にもわたり、理解するのが容易ではない。操作する量¹⁾が 10 個以上もあるために、コンピュータを使わざるを得ないこともその複雑さを示唆している。レース展開に関しても非常にテクニカルな解析方法ゆえ、あらゆる人々に親しまれているものではなかった。こうした結果、SAW の臨界現象が広く認知されているとは言い難い。

120 ページ以上あり複雑であった証明を、簡単で誰でもわかるように改良するのが本研究の主眼である。そのために、[3, 4] では単純立方格子 (simple cubic lattice) \mathbb{Z}^d 上で考えていたのを、体心立方格子 (body-centred cubic lattice) \mathbb{L}^d 上に変更した。あとで述べるように、 \mathbb{L}^d には \mathbb{Z}^d にはない利点のおかげで解析が非常に簡単になるのである。結果として、現在までに $d \geq 6$ 次元までは完成しており、すでに証明された $d \geq 5$ までではもう少しである。さらに論文にすると 20 ページ前後に抑えられることが期待できる。これは 120 ページ以上あったことと比べれば、圧倒的に少ない分量である。以下では、簡単のため $d \geq 7$ で用いた手法に関して、その証明の概要を述べよう。

2 体心立方格子の定義とランダムウォークの臨界現象

2.1 体心立方格子

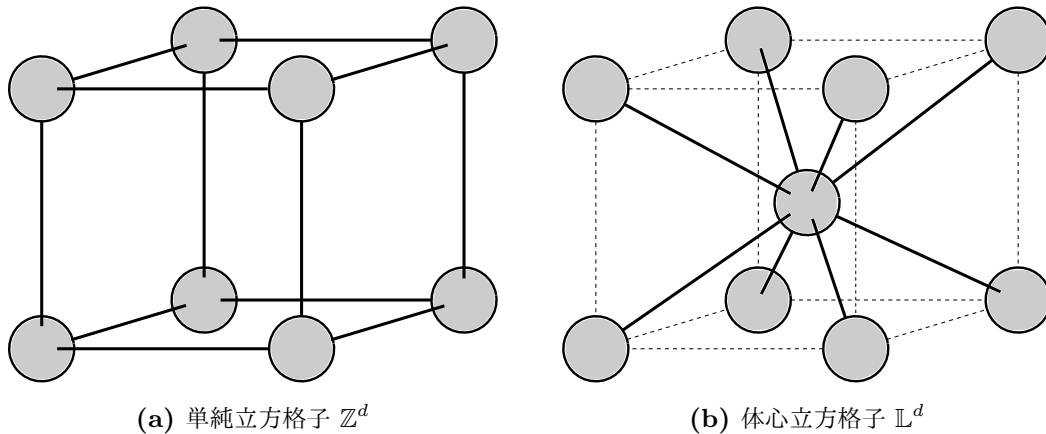


図 1: 格子の概念図。体心立方格子は単純立方格子と比べて、1 つの点がより多くの点と繋がる。点線は繋がっていないことを表す。

体心立方格子と単純立方格子の概念図を図 1 に示す。「体心」の名のとおり、立方体の中心にも点があることがわかるだろう。その分だけ隣り合う点の個数が多くなるのである。さて、 d 次元体心立方格子 \mathbb{L}^d を数学的に定義するには d 次元単純立方格子 \mathbb{Z}^d の定義を見直してみるとよい。 \mathbb{Z}^d の最近接点を $\left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \sum_{j=1}^d |x_j| = 1 \right\}$ で定義する。その点の数は $2d$ 個ある。このとき \mathbb{Z}^d は

- 原点を含み $\mathbb{Z}^d \ni o = (0, 0, \dots, 0)$,
- 最近接点を平行移動することで生成される集合

¹⁾ Bootstrapping argument (後述) で用いる、 K_1, K_2, K_3 で押さえられる量のこと。

と見なせる。この最近接点のところを変えることで体心立方格子を定義することができる。すなわち \mathbb{L}^d の最近接点を

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid |x_1| = |x_2| = \dots = |x_d| = 1\}$$

と定義する。その点の数は 2^d 個ある。このとき \mathbb{L}^d は

- 原点を含み $\mathbb{L}^d \ni o = (0, 0, \dots, 0)$,
- 最近接点を平行移動することで生成される集合

と定義される。以下、点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d), y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{L}^d$ が互いに最近接点であることを

$$x \sim y \iff |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = \dots = |x_d - y_d|$$

で表す。

\mathbb{Z}^d と比べてときの \mathbb{L}^d の利点は、RW の遷移確率 (transition probability) が非常に簡単になることである。 o から x に遷移する確率を $D(x)$ で表すことにすれば、

$$D(x) := \frac{1}{2^d} \mathbb{1}_{\{x \sim o\}} = \prod_{j=1}^d \frac{1}{2} \delta_{|x_j|, 1}^{(2)}$$

という、単なる 1 次元遷移確率の積で表されてしまうのである。このことから、 d 次元体心立方格子 \mathbb{L}^d 上では、 $2n$ 歩で原点に戻って来る確率を簡単に表すことができる。すなわち

$$D^{*(2n)}(o) = \underbrace{(D * \dots * D)}_{2n\text{-fold}}(o)^3 = \left(\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right)^d \quad (1)$$

となる。(1) に現れた二項係数は、1 次元 RW と同様に、Stirling の公式

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{12n+1} \leq \log \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} \leq \frac{1}{12n}$$

を用いて評価できる。よって、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right)^d \leq \left[\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(\frac{1}{24n} - \frac{2}{12n+1}\right) \right]^d \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^d$$

を得る。この不等式評価から、 $D^{*(2n)}(o)$ は上から押さえられる。

2.2 ランダムウォークの臨界現象

SAW の臨界現象について見てゆく前に、RW の臨界現象を見てみよう。まず、 n 歩の RW の経路を、順序づけられた $n+1$ 個の点の集合

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) \quad (\omega_i \in \mathbb{L}^d, \forall i = 0, 1, \dots, n)$$

²⁾ $\delta_{\cdot, \cdot}$ は Kronecker デルタ, $\mathbb{1}$ は indicator 関数。また ‘:=’ は右辺によって左辺を定義するという意味。

³⁾ 関数 $f, g: \mathbb{L}^d \rightarrow \mathbb{R}$ の畳み込みを $(f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{L}^d} f(y)g(x-y)$ で表す。

と定義する。その歩数を $|\omega| = n^4$ で表す。つぎに、RW の二点相関関数⁵⁾を、 $p \in [0, 1)$ と $x \in \mathbb{L}^d$ に対して

$$S_p(x) := \sum_{\omega: o \rightarrow x} p^{|\omega|} \prod_{j=1}^{|\omega|} D(\omega_j - \omega_{j-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (pD)^{*n}(x) = \delta_{o,x} + \sum_{n=1}^{\infty} (pD)^{*n}(x) \quad (2)$$

と定義する。ここで総和は o から x に至るすべての経路についてとることを意味し、総積の因子はその経路が一步步が隣り合った点 $(\omega_{j+1} \sim \omega_j)$ になっていることを意味する。等号の部分は RW が単に遷移確率を積み重ねていったものであることによる。最後に RW の帯磁率⁶⁾を

$$\chi_p^{\text{RW}} := \sum_{x \in \mathbb{L}^d} S_p(x) \quad (3)$$

と定義する。 p を 0 から上げていったときに、帯磁率 χ_p^{RW} が発散する点 p_c が臨界点である。(2) を (3) に代入して、 $p \in [0, 1)$ であったことを思い出せば

$$\chi_p^{\text{RW}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$$

を得る。この式から、RW の臨界点は $p_c = 1$ だとわかる。

3 最近接自己回避歩行と主結果

SAW は先に述べたように、自分自身の経路と交わらない RW である。具体的には、 n 歩の SAW とは

- 順序づけられた $n + 1$ 個の点の集合 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n)$ ($\omega_i \in \mathbb{Z}^d, \forall i = 0, 1, \dots, n$) で、
- 一步步が隣り合った点 $\omega_{j+1} \sim \omega_j$ になっており、
- 自分自身の経路と交わらない $\omega_i \neq \omega_j$ when $i \neq j$ (体積排除効果)

ものである。最後の条件だけが RW と異なるが、しかし、そのために RW と比べて解析が非常に難しいものとなっている。SAW に対する二点相関関数を、 $p \in [0, p_c)$ (p_c の定義はすぐあとで述べる) と $x \in \mathbb{L}^d$ に対して

$$G_p(x) := \sum_{\omega: o \rightarrow x} p^{|\omega|} \prod_{j=1}^{|\omega|} D(\omega_j - \omega_{j-1}) \prod_{0 \leq s < t \leq |\omega|} (1 - \mathbb{1}_{\{\omega_s = \omega_t\}})$$

と定義する。前半は RW の二点相関関数と全く同じである。後半の $1 - \mathbb{1}_{\{\omega_s = \omega_t\}}$ の因子だけが異なる。それは、経路が一回でも交われば 0 になって、然る如き経路からの寄与はなくなるから、SAW の体積排除効果を表す因子である。また、帯磁率と臨界点は

$$\chi_p := \sum_{x \in \mathbb{L}^d} G_p(x), \quad p_c := \sup \{ p \geq 0 \mid \chi_p < \infty \}$$

4) これは Euclid ノルム $|\omega_i|$ とは異なることに注意されたい。

5) その名のとおり、二点間の相互作用を表す関数であるため、Green 関数とも呼ばれる。Green 関数は物理学においてしばしば用いられる関数であり、一点に集中した刺激を加えたときの物理系の応答という物理的意味がある。

6) この名称はスピン系との対応に由来する。

と定義される。帯磁率の臨界点近傍での振る舞いを特徴づける量として、臨界指数 γ を

$$\chi_p \asymp (p_c - p)^{-\gamma}$$

で定義する。ここで ' \asymp ' は、上下から同じオーダーで押さえられることを意味する。

臨界指数 γ を決定するためには、次の命題⁷⁾を利用する。

命題 1. 帯磁率 χ_p に関して不等式

$$\frac{\chi_p^2}{G_p^{*2}(o)} \leq \frac{d}{dp} (p\chi_p) \leq \chi_p^2$$

が成り立つ。これを変形して

$$\frac{p_c}{p_c - p} \leq \chi_p \leq G_{p_c}^{*2}(o) \frac{2p_c - p}{p_c - p}$$

を得る。したがって、*bubble condition*

$$G_{p_c}^{*2}(o) = \lim_{p \uparrow p_c} \sum_{x \in \mathbb{L}^d} G_p(x)^2 = \lim_{p \uparrow p_c} \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{G}_p(k)^2 \frac{d^d k}{(2\pi)^d} < \infty^8) \quad (4)$$

が成り立つならば、 $\gamma = 1$ である。

Bubble condition は、二点相関関数の Fourier 変換に対する、ある種の二乗可積分性を意味する。この命題により、臨界指数を決定するためには、次の定理を証明することに帰着する。これが本研究の主結果である。

定理 1 (主結果 with 坂井, 半田). $\forall d \geq d_0$ (現在のところ $d_0 = 7$),

$$\exists C \in [1, p_c) \quad \text{s.t.} \quad \frac{|\hat{G}_p(k)|}{\hat{S}_{\mu_p}(k)} \leq C.$$

ただし、 $\hat{S}_{\mu_p}(k)$ は RW の二点相関関数を Fourier 変換したもの $\hat{S}_{\mu_p}(k) = 1/[1 - \mu_p \hat{D}(k)]$ であり、 μ_p はパラメータ p を区間 $[0, 1)$ に収まるように変換したもの $\mu_p = 1 - \chi_p^{-1}$ である。

実際、(4) の $\hat{G}_p(k)$ に定理 1 の評価を適用して、RW の再帰確率を計算するのと同じような計算をすれば、*bubble condition* が成り立つことがわかる。

4 主結果の証明

4.1 レース展開とその導出

高次元における、二点相関関数を解析する方法がレース展開である。それは二点相関関数に対するある種の self-consistent な方程式を与える。

命題 2 (レース展開). 二点相関関数 $G_p(x)$ に対して

$$G_p(x) = \delta_{o,x} + (pD * G_p)(x) + (\Pi_p * G_p)(x) \quad (5)$$

⁷⁾ 証明は [6, Theorem 2.3] を参照。

⁸⁾ 関数 $f(x)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(k) = \sum_{x \in \mathbb{L}^d} f(x) e^{ik \cdot x}$ で表す。

が成り立つ。ただし、 $\Pi_p(x)$ はレース展開係数であり、次のように表される。

$$\Pi_p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi_p^{(n)}(x) = - \underbrace{\circ \text{---} \circ}_{x=o} + \circ \text{---} \circ \text{---} x - \text{triangle} + \text{quadrilateral} - \dots \quad (6)$$

証明の概略。ここでは直感的な描像を用いてレース展開を導出しよう。そのために、二点相関関数を点と self-avoiding な線を使って表す⁹⁾。

$$G_p(x) = \circ \text{---} \bullet x$$

これをまず、一歩目で区切る。

$$= \sum_{y \in \mathbb{L}^d} \underbrace{\circ \text{---} \bullet y}_{1 \text{ 歩}} \text{---} \bullet x$$

線はもともと一本の self-avoiding な経路であったから、2本の経路 $o \rightarrow y$ と $y \rightarrow x$ は互いに避け合う必要がある。そのようなわけで“avoid”と書いた。つぎに、inclusion-exclusion と呼ばれる手法を用いる。

$$= \sum_{y \in \mathbb{L}^d} \left(\circ \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x - \underbrace{\circ \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} \right)$$

これは「 o からいったん y に行き、それとは独立に y から x に至る、それぞれ1本の self-avoiding な経路」から「 o からいったん y に行き、それと必ず交わって y から x に至る、それぞれ1本の self-avoiding な経路」を引くことである。いわば余事象をとるようなものである¹⁰⁾¹¹⁾。括弧内の最後の項に、再び inclusion-exclusion を適用する。

$$= \circ \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x - \sum_{y \in \mathbb{L}^d} \left(\underbrace{\circ \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} - \sum_{z \in \mathbb{L}^d} \underbrace{\circ \text{---} \bullet z \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} \right)$$

ここで、ラベルの付いていない点ではすべての y に関して和をとる、という表記を用いた。

$$\begin{aligned} &= \circ \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x - \underbrace{\circ \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} \\ &+ \sum_{z \in \mathbb{L}^d} \left(\underbrace{\circ \text{---} \bullet z \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} - \sum_{w \in \mathbb{L}^d} \underbrace{\circ \text{---} \bullet w \text{---} \bullet z \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} \right) \\ &= \circ \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x - \underbrace{\circ \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} + \underbrace{\circ \text{---} \bullet z \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} \\ &- \sum_{w \in \mathbb{L}^d} \left(\underbrace{\circ \text{---} \bullet w \text{---} \bullet z \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} - \underbrace{\circ \text{---} \bullet w \text{---} \bullet v \text{---} \bullet z \text{---} \bullet y \text{---} \bullet x}_{\text{avoid}} \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

以下、無限に続く。上に現れた線を

⁹⁾ 以下の導出は $x \neq o$ に対する表式である。 $x = o$ に対しては、定義から $G_p(o) = 1$ である。そのようなわけで、(5) において Kronecker デルタが現れる。

¹⁰⁾ より詳しく言うと、 $\mathbb{1}_{\{\omega^{(1)} \circ \omega^{(2)} \text{ is SAW}\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{\omega^{(1)} \circ \omega^{(2)} \text{ is not SAW}\}}$ なる自明な等式を用いている。ただし、2本の経路を $\omega^{(1)}: o \rightarrow y$ と $\omega^{(2)}: y \rightarrow x$ で表し、‘ \circ ’は2本の経路を合わせた1本の経路全体を意味する。

¹¹⁾ 経路 $y \rightarrow x$ が o を通っているのは y が一歩離れた点だったことによる。また、経路 $y \rightarrow x$ は1本の self-avoiding な経路だったから、再び“avoid”と書いた。

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathbb{L}^d} o \xrightarrow{y} x &= ((pD) * G_p)(x), & o \xrightarrow{\text{loop}} x &= (\pi_p^{(1)} * G_p)(x)^{12), \\ \sum_{z \in \mathbb{L}^d} o \xrightarrow{z} x &= (\pi_p^{(2)} * G_p)(x), & \sum_{w \in \mathbb{L}^d} o \xrightarrow{w} x &= (\pi_p^{(3)} * G_p)(x), \\ & \dots & & \end{aligned}$$

などと等置すれば、(5)を得る。これを見ると、(6)のダイアグラムが現れているのがわかるだろう。□

4.2 $|\hat{G}_p(k)|$ の評価

レース展開によって、二点相関関数の Fourier 変換 $\hat{G}_p(k)$ に対する評価が得られる。すなわち、(5)の両辺の Fourier 変換をとって

$$\hat{G}_p(k) = 1 + p\hat{D}(k)\hat{G}_p(k) + \hat{\Pi}_p(k)\hat{G}_p(k) \quad \text{つまり} \quad \hat{G}_p(k) = \frac{1}{1 - p\hat{D}(k) - \hat{\Pi}_p(k)}$$

となる。 $\Pi_p(x)$ に対して、奇数項の和を $\Pi_p^{\text{odd}}(x)$ とし、偶数項の和を $\Pi_p^{\text{even}}(x)$ とする： $\Pi_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi_p^{(n)}(x) = -\Pi_p^{\text{odd}}(x) + \Pi_p^{\text{even}}(x)$ 。このとき χ_p の定義から

$$\chi_p = \hat{G}_p(0) = \frac{1}{1 - p - \hat{\Pi}_p(0)} \quad \therefore p = 1 - \chi_p^{-1} - \hat{\Pi}_p(0) \leq 1 + \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) \quad (7)$$

を得て、 $\hat{S}_{\mu_p}(k)$ で割ることで

$$-\frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0)}{p} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)}{p[1 - \hat{D}(k)]}}{1 - \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p[1 - \hat{D}(k)]}} \leq \frac{\hat{G}_p(k)}{\hat{S}_{\mu_p}(k)} - 1 \leq \frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0)}{p} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p[1 - \hat{D}(k)]}}{1 - \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p[1 - \hat{D}(k)]}} \quad (8)$$

を得る。定理 1 を証明するためには、あとは $\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0)$ 、 $\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0)$ や $\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)$ 、 $\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)$ を評価すればよい。そこで次の補題が成り立つ。

補題 1. レース展開係数を Fourier 変換したものは

$$\begin{aligned} 0 \leq \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) \leq L + \frac{rB(p\|D\|_{\infty} + L)}{1 - r^2}, & \quad 0 \leq \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} \leq \frac{\hat{W}(k)}{1 - \hat{D}(k)} \frac{B^2(1 + r^2)}{p(1 - r^2)^3}, \\ 0 \leq \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) \leq \frac{B(p\|D\|_{\infty} + L)}{1 - r^2}, & \quad 0 \leq \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} \leq \frac{\hat{W}(k)}{1 - \hat{D}(k)} \frac{B(1 + rB)}{p(1 - r^2)^3} \end{aligned}$$

と評価できる。ただし

$$\begin{aligned} L &:= \left\| (pD)^{*2} * G_p \right\|_{\infty}, & B &:= \left((pD)^{*2} * G_p^{*2} \right)(o), \\ r &:= p\|D\|_{\infty} + L + B, & \hat{W}(k) &:= \sup_{x \in \mathbb{L}^d} G_p(x) (1 - \cos(k \cdot x)). \end{aligned}$$

とおいた。

結局、定理 1 を証明することは、 L 、 B 、 r 、 $\hat{W}(k)$ を評価することに帰着する。

¹²⁾ $\pi_p^{(1)}$ だけ総和記号が抜けている。ここに無理矢理 $\sum_{x \in \mathbb{L}^d} \delta_{o,x}$ を加えることにより、畳み込みで書いている。それゆえ (6) において ' $x = o$ ' と書いたのは、原点に戻るループに Kronecker デルタを掛けたもの、という意味をもつ。

4.3 Bootstrapping argument

証明を完遂するために、次のような bootstrapping argument と呼ばれる手法を用いる。

Step 1. 適当な関数

$$\begin{cases} g_1(p) = p \\ g_2(p) = \sup_{k \in [-\pi, \pi]^d} \frac{|\hat{G}_p(k)|}{\hat{S}_{\mu_p}(k)} \\ g_3(p) = \sup_{k, l \in [-\pi, \pi]^d} \frac{|\hat{\Delta}_k \hat{G}_p(l)|}{\hat{U}_{\mu_p}(k, l)} \end{cases}$$

を選び、upper bound $g_i(p) \leq K_i, \forall i = 1, 2, 3$ を仮定する。ただし

$$\hat{U}_{\mu_p}(k, l) = [1 - \hat{D}(k)] \left[\frac{\hat{S}_{\mu_p}(l+k) + \hat{S}_{\mu_p}(l-k)}{2} \hat{S}_{\mu_p}(l) + 4\hat{S}_{\mu_p}(l+k)\hat{S}_{\mu_p}(l-k) \right]$$

であって、 $\hat{\Delta}_k$ は離散ラプラシアンを 2 で割ったもの

$$\hat{\Delta}_k \hat{G}_p(l) = \frac{\hat{G}_p(l+k) + \hat{G}_p(l-k)}{2} - \hat{G}_p(l)$$

である。

Step 2. 初期値 $p = 0$ で $g_i(0) < K_i, \forall i = 1, 2, 3$ を満たすことと、 $p \in [0, p_c)$ で連続であることを確認する。つまり

$$g_1(0) = 0, \quad g_2(0) = 1, \quad g_3(0) = 0$$

であるから、 K_1, K_2, K_3 はそれぞれ 0, 1, 0 より大きく取らねばならない。関数も、連続になるように選ばなければならない。

Step 3. 次元 d が十分大きいとして、upper bound の仮定が満たされるならば、選んだ関数は $p \in (0, p_c)$ で upper bound より真に小さくなっている： $g_i(p) < K_i, \forall i = 1, 2, 3$ ことを証明する。いいかえると、upper bound の仮定から improved bound が出て来ることを証明する。

このとき $g_1(p), g_2(p), g_3(p)$ は、 $p \in [0, p_c)$ で improved bound 以下になっている。なぜなら、 $g_i(0) < K_i$ および $p \in (0, p_c)$ で $g_i(p) < K_i, \forall i = 1, 2, 3$ であるから。もしある点 p で improved bound を飛び越えて $g_i(p) \geq K_i$ となるなら、それは $g_i(p), \forall i = 1, 2, 3$ が連続であったことに反する。以上のことが示されれば、 $g_2(p)$ は $p \in [0, p_c)$ で真に K_2 より小さいことがわかるから、定理 1 の証明が完了する。

Bootstrapping hypothesis (upper bound の仮定) から、次の補題が成り立つ。

補題 2. $L, B, r, \hat{W}(k)$ は

$$\begin{aligned} L &\leq K_1^2 K_2 \varepsilon_1, & B &\leq K_1^2 K_2^2 \varepsilon_2, \\ r &\leq \frac{K_1}{2^d} + K_1^2 K_2 \varepsilon_1 + K_1^2 K_2^2 \varepsilon_2, & \frac{\hat{W}(k)}{1 - \hat{D}(k)} &\leq 5K_3 (1 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

と上から押さえられる。ただし、 ε_1 と ε_2 はそれぞれ RW のループとバブル

$$\varepsilon_1 := (D^{*2} * S_1)(o) = \sum_{n=1}^{\infty} D^{*(2n)}(o), \quad \varepsilon_2 := (D^{*2} * S_1^{*2})(o) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) D^{*(2n)}(o) \quad (9)$$

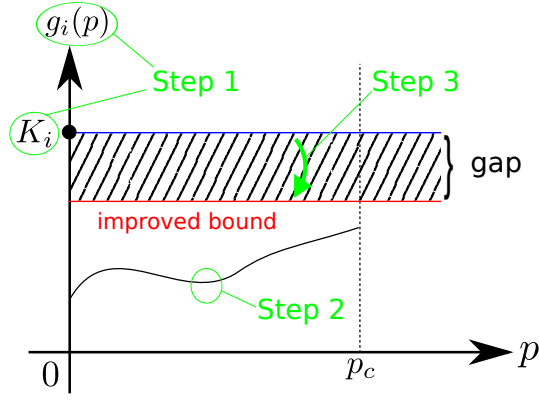


図 2: Bootstrapping argument の概念図. Upper bound K_i を仮定すれば, improved bound が出て来る.

である.

(9) は体心立方格子上の遷移確率の性質 (1) と Stirling の公式により評価できる. 次元 d が十分大きいとき, ε_1 と ε_2 は小さくなることに注意しよう. また $g_1(p)$, $g_2(p)$, $g_3(p)$ の improved bound は, (7) と (8) と [6, Lemma 5.7] から,

$$\begin{cases} g_1(p) \leq 1 + \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) \\ g_2(p) \leq \max \left\{ \left| 1 - \frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0)}{p} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)}{p[1 - \hat{D}(k)]}}{1 - \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p[1 - \hat{D}(k)]}} \right|, \left| 1 + \frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0)}{p} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p[1 - \hat{D}(k)]}}{1 - \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p[1 - \hat{D}(k)]}} \right| \right\} \\ g_3(p) \leq 2K_1^2 K_2^3 \left[1 + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} \right]^2 \end{cases} \quad (10)$$

となる. 補題 1 と補題 2 により, これらは K_1, K_2, K_3 と $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ で表される. また $g_1(p)$, $g_2(p)$, $g_3(p)$ の連続性は [6, Chapter 5] と同様に示される.

残りは (10) が成り立つような K_1, K_2, K_3 が存在することを示せば, bootstrapping argument が完成する. それには, 例えば

$$K_1 = 1.03, \quad K_2 = 1.03, \quad K_3 = 6.00$$

にとればよい. 実際これらを, (10) を K_1, K_2, K_3 と $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ で表したものに代入して計算すると,

$$g_1(p) \leq 1.02 < 1.03, \quad g_2(p) \leq 1.01 < 1.03, \quad g_3(p) \leq 5.47 < 6.00$$

となって improved bound が出て来るのがわかる.

5 今後の展望

前節までに述べた方法で, $d_0 = 7$ としたときの定理 1 を証明できる. $d_0 = 6$ としたときの証明するには, 補題 1 の評価を改善する. すなわち,

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_p^{(2)}(0) - \hat{\pi}_p^{(2)}(k) &= \sum_{x \in \mathbb{L}^d} \text{Diagram 1} (1 - \cos(k \cdot x)) \\ \hat{\pi}_p^{(3)}(0) - \hat{\pi}_p^{(3)}(k) &= \sum_{x \in \mathbb{L}^d} \text{Diagram 2} (1 - \cos(k \cdot x)) \end{aligned}$$

の評価を改善する。これは、補題 1 ではどの $n \in \mathbb{N}$ に対しても同じように $\hat{\pi}_p^{(n)}(0) - \hat{\pi}_p^{(n)}(k)$ を上から押さえてしまったことによる。同じように押さえることは、 n が十分大きいときには有効だが、小さいときには粗くなってしまう。それで n が小さいものは個別に評価しようというのである。具体的には上の式における総和を、歩数が短いところ・長いところ、および距離が近いところ・遠いところで分類する。その分類された x に関してダイアグラムを評価する。

このようにして $d_0 = 6$ としたときの定理 1 を証明できる。一方で、すでに \mathbb{Z}^d 上で証明された、 $d_0 = 5$ としたときのを示すことは未だ達成していない。それを達成するためには、先述のように波数空間（引数を k で表していた空間）で考えるのではなく、実空間（引数を x で表していた空間）で考えるのが有効ではないかと思われる。なぜなら、 \mathbb{Z}^d 上では遷移確率が複雑な形になるために Fourier 変換を用いざるを得なかったが、 \mathbb{L}^d 上では遷移確率が簡単な形になるからである。わざわざ Fourier 変換した G_p と S_{μ_p} の比を調べるのではなく、直接その比を調べることができるのではないかと考えている。

また、SAW 以外に最近接パーコレーション (nearest-neighbour percolation, 以下単にパーコレーション) というモデルがある。パーコレーションは、 $p \in [0, 1]$ と各ボンド $\{u, v\}$ に対して確率 $pD(u-v)$ で開いている、確率 $1 - pD(u-v)$ で閉じているという状態が与えられるモデルである。これも臨界現象を示すモデルとして知られている。上部臨界次元の予想値は $d_c = 6$ である。しかし、パーコレーションの高次元臨界現象に関する問題は SAW に比べると非常に難しく、未だ $d \geq 11$ で臨界指数が平均場臨界指数に退化することしか示されていない [2]。しかも [2] で用いられた手法は non-backtracking lace expansion という、通常のレース展開 (lace expansion) よりも相当難しい手法である。

パーコレーションに対しても、体心立方格子の性質を用いて平均場臨界指数への退化を証明できる。それは non-backtracking lace expansion のような難しい手法を使わない。さらに $d \geq 10$ で示すことに成功した。そのことから、パーコレーションでの結果は先行研究を凌駕しているといえよう。今後は、これをせめて一桁で—— $d \geq 9$ で示すことも目指したい。

参考文献

- [1] D. C. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **97**, pp. 125–148, (1985).
- [2] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Nearest-neighbor percolation function is continuous for $d > 10$. Preprint, (2015). arXiv:1506.07977.
- [3] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **147**, pp. 101–136, (1992).
- [4] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.*, Vol. **4**, pp. 235–327, (1992).
- [5] T. Hara and G. Slade. Mean-field behaviour and the lace expansion. In G. Grimmett, editor, *Probability and Phase Transition*, Dordrecht, (1994). Kluwer.
- [6] G. Slade. *The Lace Expansion and its Applications*. Springer, (2004). Lecture Note in Mathematics 1879.