# 分散型偏微分方程式の初期値問題における平滑化評価のモデル評価の構成と改良

北海道大学大学院理学院数学専攻 修士課程

江藤　修（ETO SHU）

**注意.** 下に記号一覧があります.

## 1　導入

### 1.1　平滑化評価（smoothing estimate）とはなにか？

一般に平滑化評価とは，Schrödinger 方程式など分散型方程式の初期値問題に生じる平滑化効果（ある初期値問題を考えたとき，その解の空間変数に関する滑らかさは，その初期値の滑らかさより増大する現象.）をもたらす不等式のことで，具体的に述べると

$$\left\| |D|^{1/2}\psi(x,t) \right\|_{L^2_t(\mathbf{R})} \leq \|\psi_0\|_{L^2_x(\mathbf{R})},\ D = \frac{1}{i}\cdot\frac{d}{dx},\ x\in\mathbf{R} \tag{1}$$

があげられる．ここで $\psi$ とは自由 Schrödinger 方程式の初期値問題の解であり，$\psi_0$ はその初期値である．この事実は，解の時間 $L^2$-平均を行うと解の空間に対する滑らかさが初期値よりも $\frac{1}{2}$ 増えていると解釈できる．ここでは（もう少し広く）何らかのノルム空間において，ある初期値問題の解に適当な微分作用素をつけたものを初期値で評価したものを**平滑化評価**と呼ぶことにする．
初めに，先述の自由 Schrödinger 方程式（非相対論的 Schrödinger 方程式の一つ）を例に用いて，本稿で述べる平滑化評価というものがどういうものなのか，簡単に説明しよう．

$$(\mathbf{S})\begin{cases}(i\partial_t - \Delta_x)\psi(x,t) = 0,\ (x,t)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R},\\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ x\in\mathbf{R}^d.\end{cases} \tag{2}$$

この初期値問題の解は Fourier transform を用いて次のように表示することができる：

$$\psi(x,t) = \mathcal{F}_\xi^{-1}[e^{it|\xi|^2}\mathcal{F}_x[\psi_0](\xi)](x) =: e^{it\Delta_x}\psi_0(x), (x,t)\in\mathbf{R}^{d+1},\ d\geq 1.$$

ここで，Fourier transform は $\mathcal{F}_\xi[f](x) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}f(\xi)d\xi,\ \mathcal{F}_\xi^{-1}[f](x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\cdot\xi}f(\xi)d\xi,\ x\in\mathbf{R}^d$ とする．よく知られているように，この解は次の保存則を満たす：

$$\|\psi(x,t)\|_{L^2_x(\mathbf{R}^d)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbf{R}^d)},\ t\in\mathbf{R}. \tag{3}$$

[KPV1991] は空間次元が $d=1$ のとき，位置 $x\in\mathbf{R}$ を固定するたびに，

$$\left\| |D|^{1/2}\psi(x,t) \right\|_{L^2_t(\mathbf{R})} \leq \|\psi_0\|_{L^2_x(\mathbf{R})},\ D = \frac{1}{i}\cdot\frac{d}{dx} \tag{4}$$

が成り立つことを示した．これは，空間に対して regularity が 1/2 得られることを意味している．（このことは，適切な座標変換と Plancherel の定理から導かれる．）したがって，$\langle x\rangle=(1+x^2)^{1/2}$ に対して次の時空間評価を得ることができる：

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}|D|^{1/2}\psi(x,t)\right\|_{L_t^2(\mathbf{R}:L_x^2(\mathbf{R}))}\lesssim\|\psi_0\|_{L_x^2(\mathbf{R})},\ s>1/2. \tag{5}$$

これが，自由 Schrödinger 方程式の初期値問題の空間 1 次元の平滑化評価である．また，空間次元 $d\geq 2$ の場合，次の結果が知られている：

$$\|T\psi(x,t)\|_{L_t^2(\mathbf{R}:L_x^2(\mathbf{R}^d))}\lesssim\|\psi_0\|_{L_x^2(\mathbf{R}^d)}. \tag{6}$$

ここで，$T$ は 3 つのケースに分けられる：

(A) $T=\langle x\rangle^{-s}|D|^{1/2},\ s>1/2,$
(B) $T=|x|^{\alpha-1}|D|^{\alpha},\ 1-d/2<\alpha<1/2,$
(C) $T=\langle x\rangle^{-s}\langle D\rangle^{1/2},\ s\geq 1,\ (d=2$ のときは $s>1).$

ただし，$D=(D_1,\cdots,D_d),\ D_j=\frac{1}{i}\cdot\partial_{x_j},\ j\in\{1,\cdots,d\}$ である．また，$|x|=(\sum_{j=1}^d x_j^2)^{1/2},\ \langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2},\ |D|^{\alpha}=\mathcal{F}_\xi^{-1}[|\xi|^{\alpha}\mathcal{F}[\cdot](\xi)](\cdot),\ |\xi|=(\sum_{j=1}^d\xi_j^2)^{1/2}.$
ここで，タイプ別に先行結果を紹介する．まずタイプ (A) は [BK1990] によって $d\geq 3$ の場合が示され，[C2002] によって $d\geq 2$ の場合が示された．続いて，タイプ (B) は [KY1989] が $d\geq 3,\ 0\leq\alpha<1/2$ 及び $d=2,\ 0<\alpha<1/2$ のときを示し，[S1998] が $d\geq 2$ の場合を示し，[W1991] は $\alpha=1/2$ のとき評価が成り立たないことを示した．そして，タイプ (C) は [KY1989] により $d\geq 3$ [Wa1999] により $d\geq 2$ のとき成り立つことが示された．また，[Wa1999] は $s<1$ のとき（ただし，$d=2$ のときは $s\leq 1$.）に成り立たないことを示した．（これらの結果は，平滑化評価と同値な Fourier 制限定理，resolvent 評価を経由することにより証明されている．これらについてはここでは言及しない．）
ここで，上の微分作用素 $\Delta_x$ を Fourier mupltiplier $a(D)$（すなわち，$a(D)$ とは実数値関数 $a(\xi)\in C_\xi^\infty(\mathbf{R}^d\backslash\{0\})$ を用いて $a(D)=\mathcal{F}_\xi^{-1}[a(\xi)\mathcal{F}[\cdot](\xi)](\cdot)$ で定義する作用素である．）に一般化した

$$(\mathbf{GS})\begin{cases}(i\partial_t+a(D))\psi(x,t)=0,\ (x,t)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}_+,\\ \psi(x,0)=\psi_0(x),\ x\in\mathbf{R}^d,\end{cases} \tag{7}$$

という初期値問題を考える．$a(\xi)$ に条件を与えよう：

$$(\mathbf{H}):\ a(\xi)=a_\beta(\xi),\nabla a(\xi)\neq 0,\ (\xi\neq 0). \tag{8}$$

ここで $a_\beta(\xi)$ とは，ある $\beta>0$ に対して定まる $\beta$ 次-正斉次関数であり，$C^\infty(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ に属するとする．例えば，$a_2(\xi)=|\xi|^2$ なら $a(D)=\Delta_x$ であり，先ほどの自由 Schrödinger 方程式になる．また，$a(\xi)=\sqrt{|\xi|^2+1}$ とすると $a(D)=\sqrt{-\Delta_x+1}$ で相対論 Schrödinger 方程式，$d=1,\ a(\xi)=\xi^3$ なら $a(D)=-\frac{1}{i}\partial_{xxx}$ で Airy 方程式，$d=1,\ a(\xi)=\xi|\xi|$ なら $a(D)=-i\partial_x|\partial_x|$ で Benjamin-Ono 方程式の線形部分，$d=2,\ a(\xi)=\xi_1^2-\xi_2^2$ なら $a(D)=-(\partial_{xx}-\partial_{yy})$ で Davey-Stewartson 方程式の線形部分．また，$a(\xi)=|\xi|^\beta,\ d\geq 1$ も $(\mathbf{H})$ を満たすことに注意する．本稿では，上記の Fourier multiplier から定まる方程式を**分散型方程式**と呼ぶことにする．先ほどの Schrödinger の場合と同様に，Fourier transform で $(\mathbf{GS})$ の解 $\psi(x,t)$ を表すと

$$\psi(x,t)=\mathcal{F}_\xi^{-1}[e^{ita(\xi)}\mathcal{F}[\psi_0](\xi)](x)=:e^{ita(D)}\psi_0(x),(x,t)\in\mathbf{R}^{d+1},\ d\geq 1, \tag{9}$$

である．このとき，先述の ($\mathbf{S}$) で考えたように，時空間ノルムに関する平滑化評価を考察したい．先ほどと同様に，既に分かっている部分を分類すると次の様になる：

$$\left\|\dot{T}\psi(x,t)\right\|_{L_t^2(\mathbf{R}:L_x^2(\mathbf{R}^d))} \lesssim \|\psi_0\|_{L_x^2(\mathbf{R}^d)}, \tag{10}$$

(GA) $\dot{T} = \langle x\rangle^{-s}|D|^{(\beta-1)/2},\ s > 1/2,\ d \geq 1,$

(GB) $\dot{T} = |x|^{\alpha-\beta/2}|D|^{\alpha},\ (\beta-d+1)/2 < \alpha < (\beta-1)/2,$ また，$a(\xi) \neq 0,\ (\xi \neq 0)$ の時は $(\beta - d) < \alpha < (\beta-1)/2,$

(GC) $\dot{T} = \langle x\rangle^{-\beta/2}\langle D\rangle^{(\beta-1)/2},\ 1 < \beta < d-1,\ d \geq 3$（また，$a(\xi) \neq 0,\ (\xi \neq 0)$ の時は $1 < \beta < d,\ d \geq 2.$）

(GA),(GB) は $\beta = 2, a(\xi) = |\xi|^2$ としたとき，($\mathbf{S}$) の場合にあたることに注意する．（実は，タイプ (GA) と (GB) を認めると，タイプ (GC) を導くことが出来る．このことは，原点の cut-off 関数 $\gamma(\xi)$ を用いて初期値 $\psi_0$ を $\gamma(D)\psi_0$ と $(1-\gamma(D))\psi_0$ に分解することによって証明される．詳しくは [S2014] を参照.）タイプ (GA) は $\beta > 1$ のときは，[Chihara2002]．$\beta > 0$ は [SR2004]．(GB),(GC) は [SR2012] で示されている．
私が取り上げたいのは，[SR2004],[SR2012] における証明手法についてである．[SR2004],[SR2012] の証明手法が，これまでの証明と異なる点を [SR2004] における次の定理を例に説明する．

**定理 1.1.** (GA) のタイプの平滑化評価 (10) が成立する．ただし，$\mathrm{supp}\hat{\psi}_0 \subset [0,\infty)$ または，$\mathrm{supp}\hat{\psi}_0 \subset (-\infty, 0]$.

この定理は，1 次元線形移送流方程式の初期値問題の conservation law と comparison principle を用いて得られる model 評価

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}|D_d|^{\frac{\beta-1}{2}}e^{it|D_d|^{\beta}}\psi_0(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}:L^2(\mathbf{R}^d))} \lesssim \|\psi_0\|_{L^2(\mathbf{R}^d)},\ s > \frac{1}{2},\ d \geq 1, \tag{11}$$

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}|D_d|^{\frac{\beta-1}{2}}e^{itD_1|D_d|^{\beta-1}}\psi_0(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}:L^2(\mathbf{R}^d))} \lesssim \|\psi_0\|_{L^2(\mathbf{R}^d)},\ s > \frac{1}{2},\ d \geq 2, \tag{12}$$

を使って，座標変換と Fourier integral operator の有界性を用いて示される．このことを図で表すと

タイプ (GA) 導出フローチャート

移流方程式の保存則
↓ステップ 1．Comparison principle を適用する．
Model評価
↓ステップ 2．Fourier integral operator を適用する．
タイプ (GA) の平滑化評価

となる．これは，調べたい平滑化評価を既に分かっている別の平滑化評価から導くシンプルな手法である．本ポスターでは，まずこの手法について [SR2004],[S2006],[SR2012],[S2014] を基に解説する．ただし，正確にはもう少し一般的な結果が示されている．すなわち，次の定理が成立する．

**定理 1.2** (SR2004)**.** (GA) のタイプの平滑化評価 (10) が成立する．

（詳しくは，[SR2004] を参照.）

## 1.2 主定理

そして，本ポスターの後半では上の model 評価の指数を一般化し，空間ノルムの指数が一様ではない極座標空間 $L_r^2 L_\omega^q$, $q \le 2$ ただし，

$$\|f\|_{L_r^q L_\omega^2} = \| \|f(r\omega)\|_{L_\omega^2(S^{d-1})} r^{d-1} \|_{L_r^q([0,\infty))} \tag{13}$$

を用いて，空間時間ノルムの model 評価を構成する．すなわち，以下の 2 つの定理を示す．

**定理 1.3** (model)**.** $d = 2, \beta > 0, q < 2$ とする．このとき，$\mathrm{supp}\hat{\psi_0} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ を満たす初期値 $\psi_0$ に対して，次の評価式が成り立つ．

$$\left\| |\cos\theta|^\gamma \, |D_2|^\alpha \, e^{it|D_2|^\beta} \psi_0(r\omega) \right\|_{L_r^2 L_\omega^q (L_t^2)} \lesssim \|\psi_0\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} .$$

ただし，$\alpha$ とは $\alpha = \beta - \frac{1}{2}$ で定義される実数．また，$\gamma$ は $\gamma \ge 1$ を満たす実数．

**定理 1.4** (model)**.** $d = 2, \beta > 0, q < 2$ とする．このとき，$\mathrm{supp}\hat{\psi_0} \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ を満たす初期値 $\psi_0$ に対して，次の評価式が成り立つ．

$$\left\| |\sin\theta|^\gamma \, |D_1|^\alpha \, e^{it|D_1|^\beta} \psi_0(r\omega) \right\|_{L_r^2 L_\omega^q (L_t^2)} \lesssim \|\psi_0\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} .$$

ただし，$\alpha$ とは $\alpha = \beta - \frac{1}{2}$ で定義される実数．また，$\gamma$ は $\gamma \ge 1$ を満たす実数．

この際，$L_t^2(\mathbf{R} : L_x^2(\mathbf{R}^d))$ 評価と異なり，初期値評価に重みは $\theta$ のみに依存していることに注意する．そして，証明の手法は [SR2004],[SR2012] の方法と異なる．これは，用いているノルムが時間ノルムと空間ノルムが可換ではない為，不等式の比較から model 評価は導くことはできなかった為である．）また，定理 1.3, 1.4 において $\beta = \frac{1}{2}$ とすると $D_1, D_2$ についての解の重み付き評価になっている．

## 記号表（表記のルール）

$d \ge 1$ とする．

- $A \lesssim B$ とは，ある $C > 0$ が存在し，$A \le CB$ となること．
- $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \ge 0\}$.
- $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}_+\}$.
- $x \cdot \xi = \sum_{j \in \{1,\cdots,d\}} x_j \xi_j,\ x = (x_1, \cdots, x_d),\ \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_d)$.
- $\hat{f} = \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}_\xi[f](x) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(\xi) d\xi,\ \check{f} = \mathcal{F}^{-1}[f] = \mathcal{F}_\xi^{-1}[f](x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\cdot\xi} f(\xi) d\xi,\ x \in \mathbf{R}^d$.
- $e^{ita(D)} = \mathcal{F}_\xi^{-1}[e^{ita(\xi)} \mathcal{F}[\cdot](\xi)]$
- $I_{\Phi,\gamma} = \mathcal{F}_\xi^{-1}[\gamma(\xi)\mathcal{F}[\cdot](\Phi(\xi))],\ I_{\Phi,\gamma}^{-1} = \mathcal{F}_\xi^{-1}[\gamma(\xi)\mathcal{F}[\cdot](\Phi^{-1}(\xi))]$.
- $|x| = \sqrt{\sum_{j \in \{1,\cdots,d\}} x_j^2},\ x = (x_1, \cdots, x_d)$.
- $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}, x \in \mathbf{R}^d$.
- $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ に対して，$\nabla f = (\partial_{x_1} f, \cdots, \partial_{x_d} f)$.

- $D_j = \frac{1}{i}\partial_{x_j},\ j \in \{1, \cdots, d\},\ D = (D_1, \cdots, D_d)$.
- $|D|^\alpha = \mathcal{F}_\xi^{-1}[|\xi|^\alpha \mathcal{F}_x[\cdot](\xi)],\ \langle D\rangle^\alpha = \mathcal{F}_\xi^{-1}[\langle\xi\rangle^\alpha \mathcal{F}_x[\cdot](\xi)],\ \alpha \in \mathbf{R}$.
- $|D_j|^\alpha = \mathcal{F}_\xi^{-1}[|\xi_j|^\alpha \mathcal{F}_x[\cdot](\xi)],\ \langle D_j\rangle^\alpha = \mathcal{F}_\xi^{-1}[\langle\xi_j\rangle^\alpha \mathcal{F}_x[\cdot](\xi)],\ \alpha \in \mathbf{R}$.
- $\gamma : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ に対して，その Fourier multiplier operator を $\gamma(D) = \mathcal{F}_\xi^{-1}[\gamma(\xi)\mathcal{F}[\cdot](\xi)]$. と表記する．
- $m > 0$ とする．$a_m : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ が位数 $m$ の正斉次関数とは，任意の $\lambda > 0$ に対して，$a_m(\lambda\xi) = \lambda^m a(\xi)$, $(\xi \neq 0)$ となること．
- $S^{d-1}$ で $d$ 次元単位球を表す．つまり，$S^{d-1} = \{\xi \in \mathbf{R}^d : |\xi| = 1\}$.
- $\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} = [\int_{\mathbf{R}_x^d} |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}},\ (1 \leq p < \infty)$. $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbf{R}^d} |f(x)|$.
- $L^p_{(\cdot)}$ において $(\cdot)$ とは，その $L^p$ ノルムにおいて積分する変数のことである．
- $\|f\|_{L^q_t(\mathbf{R}:L^p_x(\mathbf{R}^d))} = \|\|f(x,t)\|_{L^p_x(\mathbf{R}^d)}\|_{L^q_t},\ (1 \leq q, p \leq \infty)$.
- $\|f\|_{L^q_r L^p_\omega} = \|\|f(r\omega)\|_{L^p_\omega(S^{d-1})} r^{d-1}\|_{L^q_r([0,\infty))}$ $(1 \leq q, p \leq \infty)$.
- $\|f\|_{L^2_t L^p_r L^q_\omega} = \left(\int_{\mathbf{R}_t} \left[\int_0^\infty \left|\int_{S^{d-1}} |f(t, rx')|^q d\omega(x')\right|^{\frac{p}{q}} r^{d-1} dr\right]^{\frac{2}{p}} dt\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|f\|_{L^q_\omega L^p_r L^2_t} \left(\int_{S^{d-1}} \left[\int_0^\infty |\int_{\mathbf{R}_t} |f(t, rx')|^2 dt|^{\frac{p}{2}} dr\right]^{\frac{q}{p}} d\omega(x')\right)^{\frac{1}{q}}$
- $\kappa : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ に対して，$\|f\|_{L^2_\kappa} = \|k(x)f(x)\|_{L^2_x(\mathbf{R}^d)}$.

## Reference


[KPV1991] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega ”Oscillatory Integrals and Regularity of Dispersive Equations”, Indiana Univ.Math.J.40(1991), 33-69.

[KPV1993] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega ”Small solutions to nonlinear Schrödinger equations”, Annales de l'I.H.P.Ana.non.lin.vol.10(1993), 255-288.

[PV] G.Ponce, L.Vega ”Introducrion to nonlinear dispersive equations” Springer(2006)

[S2006] 杉本充 ”フーリエ積分作用素の有界性と PDE への応用”, RIMS 講究録 1491(2006) , 78-105.

[S2014] 杉本充 ”分散型方程式の平滑化評価に関する最近の研究”, RIMS 講究録 1902(2012), 137-155.

[SR2004] M.Sugimoto and M.Ruzhansky ”A new proof of global smoothing estimates for dispersive equations”, Oper. Theory Adv.Appl.155(2004), 65-75.

[SR2012] M.Sugimoto and M.Ruzhansky ”Smoothing properties of evolution equations via canonical transforms and comparison”, Proc. London Math. Soc.105(2012), 393-423.

[BK1990] Matania Ben-artziSergiu Klainerman ”Decay and regularity for the Schrödinger equation”, J.Analyse Math.58(1992), 25-37.

[C2002] H.Chihara ”Smoothing effect of dispersive pseodo-differential equations”, Comm.in Par.Diff.Eq.vol 27(2002), 1953-2005.

[KY1989] T.Kato and K.Yajima ”Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect”, Rev.Math.Phys.1(1989), 481-496.

[S1998] M.Sugimoto ”Global smoothing properties of generalized Schrödinger equations”, J.Anal.Math.76(1998), 191-204.

[Wa1999] B.G.Walther ”A sharp weighted $L^2$-estimate for the solution to the time-dependent Schrödinger equation”, Ark.Math.37(1999), 381-393.

[W1991] K.Watanabe "Smooth perturbations of the self-adjoint operator$|\Delta|^{\alpha/2}$", Tokyo J.Math.14(1991), 239-250.
[H1997] 保城寿彦 "Restriction theorem と極限吸収", RIMS 講究録 994(1997), 121-130.