有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジー

北海道大学大学院理学院数学専攻
青木雅允

概 要

Chas と Sullivan によるストリングトポロジーを Felix と Thomas は Gorenstein 空間上へと拡張した。Naito は、有理ホモトピー論を用いて有理 Gorenstein 空間上の双対ループ (余) 積について調べ、Frobenius 代数の構造があることを示した。また、双対ループ積と双対ループ余積の両方が非自明にならない例も与えられた。有理ホモトピー論で出てくる基本的な用語の定義を確認した後、Naito の双対ループ積と双対ループ余積のモデルを紹介し、Naito の例を一般化して得られた結果について述べる。

1 有理ホモトピー論の準備

この章の内容については, [1], §3, 10–15 或いは [2], Chap.2 を参照.

テンソル積 $\otimes$, Hom 函手などは, 断りのない限り, $\mathbb{Q}$ 上のものを考える.

1.1 DG 代数

まず, 基本的な用語を確認しておく.

定義 1.1. ($\mathbb{Q}$ 上の) **次数付きベクトル空間** (graded −) とは, ($\mathbb{Q}$ 上の) ベクトル空間の族 $V = \{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ のこと. $v \in V_i$ なる元 v を次数 i の**斉次元**といい, v の次数を $i = \deg v = |v|$ と表す. また, 次数 i の**線型射** $f : V \to W$ とは, 線型射 $f_j : V_j \to W_{j+i}$ の族 $\{f_j\}$ のこと.

各 V_i が有限次元のとき, V は**有限型** (finite type) であるという.

定義 1.2. 次数付きベクトル空間 V の **suspension** とは,

$$(sV)_i := V_{i-1}$$

で定まる次数付きベクトル空間 sV のこと. $v \in V_{i-1}$ に対応する $(sV)_i$ の元を $sv = \tilde{v}$ で表す.

定義 1.3. ($\mathbb{Q}$ 上の) **次数付き代数** (graded algebra) とは, ($\mathbf{k}$ 上の) 次数付きベクトル空間 A であって, 次数 0 の結合的な線型射 $A \otimes A \to A$ と単位元をもつもののこと. 更に, 次数付き代数 A が (**次数付き**) **可換** ((graded) commutative) であるとは,

$$x \cdot y = (-1)^{|x||y|} y \cdot x \quad (x, y \in A)$$

なこと. また, 次数付き代数の射 $f : A \to B$ とは, 次数 0 の線型射であって,

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), f(1_B) = f(1_B)$$

なもの.

定義 1.4. DG 代数 (differential graded algebra, DG algebra) とは, 次数付き代数 A とその上の differential d であって,

$$d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^{|x|} x \cdot d(y)$$

をみたすものの組 (A, d) のこと. また, DG 代数の射 $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ とは, 次数付き代数の射であって,

$$f \circ d_A = d_B \circ f$$

なもの.

DG 代数 (A, d) に対して, コホモロジー $H^*(A, d) := \ker d \,/\, \mathrm{im}\, d$ が考えられる.

定義 1.5. コホモロジーに誘導される射 $H^*(\varphi)$ が同型になるような DG 代数の射 φ を**擬同型** (quasi-isomorphism) とよび,

$$\varphi : (A, d) \xrightarrow{\simeq} (B, d)$$

と表わす.

例 1.6. 次数付きベクトル空間 V に対して, テンソル代数の商

$$\Lambda V := TV/(v \otimes w - (-1)^{|v||w|} w \otimes v)$$

を V 上の**自由な次数付き可換代数** (free commutative graded algebra) とよぶ. differential d が

$$d(v \wedge w) = dv \wedge w + (-1)^{|v|} v \wedge dw$$

で定まり, $(\Lambda V, d)$ は DG 代数となる. V の基底が $\{v_\alpha\}$ のとき, ΛV を $\Lambda(v_\alpha)$ とも表わす.

$$\Lambda^+ V := \bigoplus_{l \geq 1} \Lambda^l V,\ \Lambda^l V := \{v_1 \wedge \cdots \wedge v_l\ (v_i \in V) \text{ という形の元の線型結合 }\}$$

とおく. 元 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_l \in \Lambda^l V$ について, この l を**語長**とよぶ. $\Lambda V = \oplus_l \Lambda^l V$ である.

定義 1.7. A を次数付き代数とする．**(左)A-加群** ((left) A-module) とは, 次数付き加群 M と次数 0 の線型射 $\varphi : A \otimes M \to M$, $x \otimes m \mapsto xm$ であって, x, $y \in A$, $m \in M$ に対して,

$$x(ym) = (xy)m,\ 1_A m = m$$

なものの組 (M, φ) のこと．右加群も同様にして定まる．また, 次数 k の A-線型射とは, 次数 k の線型射 $f : M \to N$ であって,

$$f(xm) = (-1)^{|f||x|} x f(m)$$

なもの.

定義 1.8. DG 代数 (A, d_A) 上の **(左) 加群** (left module) とは, A-加群 M とその上の differential d であって

$$d(x \cdot m) = d_A x \cdot m + (-1)^{|x|} x \cdot dm \quad (x \in A, m \in M)$$

の組 (M, d) のこと．また, DG 代数 (A, d_A) 上の加群の射 $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ とは, 次数付き A-加群の射であって,

$$f \circ d_M = d_N \circ f$$

なもの．右加群も同様にして定まる.

1.2　Sullivan 代数と Sullivan 模型

Sullivan 模型は有理ホモトピー論において特に重要な概念である.

定義 1.9. Sullivan 代数 (Sullivan algebra) とは, DG 代数 $(\Lambda V, d)$ であって, d に関する”nilpotent 条件”と呼ばれる次の性質を持つもの：V の次数付き部分空間の増大列

$$V(0) \subset V(1) \subset \cdots \subset V = \bigcup_{k \geq 0} V(k)$$

であって

$$d(V(k)) \subset \Lambda V(k-1) \quad (k \geq 1)$$

をみたすものが存在する.

単体集合に対して次数付き可換な DG 代数を対応させる反変函手 $A_{PL}(-)$ がある．これを単連結な空間 X の特異チェイン複体 $S_*(X)$ に適用することで得られる次数付き可換な DG 代数を $A_{PL}(X)$ と表わす.

定義 1.10. 次数付き可換な DG 代数 (A, d) に対する **Sullivan 模型** (Sullivan model) とは, Sullivan 代数 $(\Lambda V, d)$ と擬同型

$$m : (\Lambda V, d) \to (A, d)$$

の組のこと.

単連結な空間 X ついて, $A_{PL}(X)$ の Sullivan 模型を, X の Sullivan 模型という.

定義 1.11. Sullivan 代数 $(\Lambda V, d)$ が**極小** (minimal) であるとは,

$$\operatorname{im} d \subset \Lambda^+ V \wedge \Lambda^+ V$$

なこと.

次は Naito や我々の結果において重要な概念である.

定義 1.12. Sullivan 代数 $(\Lambda V, d)$ が **pure** であるとは, 有限生成 (つまり, $\dim V < \infty$) かつ

$$d(V^{\mathrm{even}}) = 0, d(V^{\mathrm{odd}}) \subset \Lambda V^{\mathrm{even}}$$

なこと.

定義 1.13. DG 代数 (A, d) 上の左 DG 加群 (M, d) を考える. (M, d) が**半自由** (semifree) であるとは, 部分加群の増大列

$$M(0) \subset M(1) \subset \cdots \subset M = \bigcup_{k \geq 0} M(k)$$

であって, $M(0)$ と各 $M(k)/M(k-1)$ がコサイクルを基底とする自由 A 加群であること. また, (A, d)-加群 (N, d) の**半自由分解** (semifree resolution) とは, 半自由加群 (M, d) と擬同型

$$m : (M, d) \to (N, d)$$

のこと.

次の補題は双対ループ (余) 積の模型を考える上で重要である.

補題 1.14. [4]

$$\bar{\varepsilon} := \mu \otimes \varepsilon : \Lambda V \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(sV) \to \Lambda V$$

は右 $\Lambda V \otimes \Lambda V$-加群としての ΛV の半自由分解である. ここで, μ は ΛV 上の積, ε は $\Lambda(sV)$ 上の augmentation $\Lambda(sV) \to \mathbb{Q}$ である.

ここで, "Gorenstein 空間" の定義をしておく. $C^*(-)$ を $\mathbb{Q}$ 上の特異コチェイン代数函手とする.

定義 1.15. m-次元の**有理 Gorenstein 空間**とは, 位相空間 X であって,

$$\operatorname{Ext}^*_{C^*(X)}(\mathbb{Q}, C^*(X)) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (* = m) \\ \{0\} & (* \neq m) \end{cases}$$

なもののこと.

2　双対ループ積と双対ループ余積の定義とそれらのモデル

Naito による双対ループ積と双対ループ余積のモデルを紹介する．詳細は [3, 4] を参照.

X を m 次元の単連結な有理 Gorenstein 空間, $(\Lambda V, d)$ を X の極小 Sullivan 模型とする．道の空間 X^I と自由閉道空間 LX の極小模型はそれぞれ $\mathcal{M}_{X^I} = (\Lambda V \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(sV), D)$, $\mathcal{M}_{LX} = (\Lambda V \otimes \Lambda(sV), \bar{D})$ である.

定義 2.1. 図式

$$\begin{tikzcd}
LX & LX \times_X LX \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & LX \times LX \arrow[d] \\
 & X \arrow[r] & X \times X
\end{tikzcd}$$

を考える．右側の四角形は引き戻し図式である．これに付随する Eilenberg-Moore 同型を

$$EM : H^*(P \times_{C^*(X \times X)} C^*(LX \times LX)) \to H^*(LX \times_X LX)$$

とする．**双対ループ積** (dual loop product, Dlp) とは, 合成

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dlp} : H^*(LX) \arrow[r, "(comp)^*"] & H^*(LX \times_X LX) \arrow[d, "\cong"', "EM^{-1}"] & \\
 & H^*(P \times_{C^*(X \times X)} C^*(LX \times LX)) \arrow[r, "(\Delta^! \otimes !)^*"] & H^*(LX \times LX)
\end{tikzcd}$$

のこと.

補題 2.2. Dlp のモデルは

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{LX} \arrow[d, "\cong"'] & & \\
\Lambda V \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I} & \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I} \arrow[l, "\bar{\varepsilon} \otimes 1"', "\simeq"] \arrow[r, "\bar{\mu}"] & \mathcal{M}_{LX} \otimes_{\Lambda V} \mathcal{M}_{LX} \arrow[d, "\cong"'] \\
 & & \Lambda V \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} (\mathcal{M}_{LX})^{\otimes 2} \\
\Lambda V^{\otimes 2} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} (\mathcal{M}_{LX})^{\otimes 2} \arrow[d, "\cong"'] & & \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} (\mathcal{M}_{LX})^{\otimes 2} \arrow[ll, "\Delta^! \otimes 1"'] \arrow[u, "\simeq", "\bar{\varepsilon} \otimes 1"'] \\
{\mathcal{M}_{LX}}^{\otimes 2} & &
\end{tikzcd}$$

で与えられる.

ここで, $\bar{\varepsilon} : \mathcal{M}_{X^I} \to \Lambda V$ は $(\Lambda V)^{\otimes 2}$-加群としての半自由分解, $\mu : \Lambda V \otimes \Lambda V \to \Lambda V$ は DG 代数 ΛV の積, $\Delta^!$ は $\mathrm{Ext}^m_{(\Lambda V)^{\otimes 2}}(\Lambda V, (\Lambda V)^{\otimes 2})$ の生成元の代表元.

定義 2.3. 図式

$$\begin{tikzcd} LX \times LX & LX \times_X LX \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & LX \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & X \times X \end{tikzcd}$$

を考える. 右側の四角形は引き戻し図式である. これに付随する Eilenberg-Moore 同型を

$$EM' : H^*(P \times_{C^*(X\times X)} C^*(LX)) \to H^*(LX \times_X LX)$$

とする. **双対ループ余積** (dual loop coproduct, Dlcop) とは, 合成

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dlcop} : H^*(LX \times LX) \arrow[r, "(incl)^*"] & H^*(LX \times_X LX) \arrow[d, "\cong"', "EM'^{-1}"] & \\ & H^*(P \times_{C^*(X\times X)} C^*(LX)) \arrow[r, "(\Delta^! \otimes !)^*"] & H^*(LX) \end{tikzcd}$$

のこと.

補題 2.4. Dlcop のモデルは

$$\begin{tikzcd} {\mathcal{M}_{LX}}^{\otimes 2} \arrow[d, "\cong"'] & \\ \Lambda V^{\otimes 2} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 4}} {\mathcal{M}_{X^I}}^{\otimes 2} \arrow[r, "\mu \otimes_{\mu'} \bar{\zeta}"] & \Lambda V \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} (\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I}) \\ (\Lambda V)^{\otimes 2} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} (\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I}) \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} (\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I}) \arrow[l, "\Delta^! \otimes 1"'] \arrow[u, "\simeq", "\bar{\varepsilon} \otimes 1"'] \\ \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I} \arrow[d, "\simeq"', "\bar{\varepsilon} \otimes 1"] & \\ \mathcal{M}_{LX} & \end{tikzcd}$$

で与えられる. ここで, $\mu' : (\Lambda V)^{\otimes 4} \to (\Lambda V)^{\otimes 2}$ は

$$\mu'(a \otimes b \otimes c \otimes d) = (-1)^{|d|(|b|+|c|)} ad \otimes bc \quad (a, b, c, d \in \Lambda V : \text{斉次元})$$

で定まる写像,

$$\bar{\zeta} : \mathcal{M}_{X^I} \otimes \mathcal{M}_{X^I} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{(\Lambda V)^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I}$$

は自然な商写像である.

3　双対ループ (余) 積の計算について

有理 Gorenstein 空間 X 上の双対ループ余積に関して, 特に X が多様体のときは双対ループ余積が, 分類空間のときは双対ループ積が自明になることが知られている. 一方で, Naito は対角作用による Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} \mathbb{C}P^2$ では双対ループ積も双対ループ余積も非自明になることを具体的に計算して示した. そこで, その例の一般化を考え, 双対ループ積と双対ループ余積の非自明性を示す.

極小模型を用いて双対ループ (余) 積を具体的に計算するためには

1. 自由ループ空間のコホモロジー $H^*(LX;\mathbb{Q})$ の基底の代表元を極小模型 $(\Lambda V, d)$ のコサイクルを用いて記述すること
2. 双対ループ (余) 積の定義 (§2) において現れた各 $\bar{\varepsilon} \otimes 1$ に対する切断を与えること
3. $\mathrm{Ext}^{2n+1}_{(\Lambda V)^{\otimes 2}}(\Lambda V, (\Lambda V)^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Q}$ の生成元 $\Delta^!$ を 1 つ与えること

の 3 つを解決する必要がある. lifting lemma により, 2 の section が存在することがわかり, その構成も lifting lemma の証明からの類推で出来る. また, 3 の $\Delta^!$ の構成には Naito の一般的な構成がある. 双対ループ (余) 積の自明性/非自明性については, 構成した $\Delta^!$ の形を観察して, ある特別な形の元の行き先をみればよい.

定理 3.1. Sullivan 代数 $(\Lambda V, d)$ を,

$$V = \langle u_0, u_1, \cdots, u_n, v \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$|u_i| = 2, |v| = 2n+1$$

$$du_i = 0, dv = u_0 u_1 \cdots u_n$$

によって定める. この $(\Lambda V, d)$ を極小 Sullivan 模型にもつ $2n+1$ 次元の有理 Gorenstein 空間 X を考える. このとき,

1. ある非自明なコホモロジー類 $[\gamma_n]$ に対して, $a(j)$, $b(j) \in \Lambda V$ を用いて

$$\mathrm{Dlp}([\gamma_n]) = \sum_{j=0}^{n} a(j)\tilde{u}_0 \cdots \check{\tilde{u}}_j \cdots \tilde{u}_n \otimes \tilde{u}_0 \cdots \tilde{u}_n + b(j)\tilde{u}_0 \cdots \tilde{u}_n \otimes \tilde{u}_0 \cdots \check{\tilde{u}}_j \cdots \tilde{u}_n$$

   と表わせる.

2. 双対ループ余積は非自明である.

本題に入る前に, 以下のことを確認しておく.

道の空間 X^I のモデル $\mathcal{M}_{X^I}$ の differential D は,

$$
\begin{aligned}
&D(x\otimes 1\otimes 1)=d(x)\otimes 1\otimes 1, D(1\otimes x\otimes 1)=1\otimes d(x)\otimes 1,\\
&D(1\otimes 1\otimes \tilde{u}_i)=(-u_i\otimes 1+1\otimes u_i)\otimes 1,\\
&D(1\otimes 1\otimes \tilde{v})=(-v\otimes 1+1\otimes v)\otimes 1-\sum_{k=0}^{n} f_k\otimes \tilde{u}_k\\
&\qquad \text{where}\quad f_k=\sum_{I,J}\frac{p!\ q!}{(n+1)!}\ u_I\otimes u_J
\end{aligned}
$$

で与えられる. ただし, $u_I=u_{i_1}\cdots u_{i_p}$ であり, $I=(i_1,\cdots,i_p)$ と $J=(j_1,\cdots,j_q)$ は

$$
I\sqcup J=\{0,1,\cdots,\check{k},\cdots,n\}
$$

をみたすように動くものとする. また, 自由閉道空間 LX のモデル $\mathcal{M}_{LX}$ において, differential $\bar{D}$ は

$$
\begin{aligned}
&\bar{D}(u_i\otimes 1)=0,\ \bar{D}(1\otimes \tilde{u}_i)=0,\\
&\bar{D}(v\otimes 1)=u_0\cdots u_n\otimes 1,\\
&\bar{D}(1\otimes \tilde{v})=-\sum_{k=0}^{n} u_0\cdots \check{u}_k\cdots u_n\otimes \tilde{u}_k
\end{aligned}
$$

で与えられる.

今, $(\Lambda V,d)$ は pure な Sullivan 代数である. Naito は一般の pure な Sullivan 代数 $(\Lambda W,d)$ に対して, $\mathrm{Ext}^*_{(\Lambda W)^{\otimes 2}}(\Lambda W,(\Lambda W)^{\otimes 2})\cong\mathbb{Q}$ の生成元の代表元の構成を与えた [3](Lemma 6.4). これに従って, 次数 n の右 $\Lambda V\otimes\Lambda V$-加群の射

$$
\Delta^!:(\Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda(sV),D)\to(\Lambda V\otimes\Lambda V,d)
$$

を

1. $\Delta^!(\tilde{u}_0\cdots\tilde{u}_n):=-v\otimes 1+1\otimes v$,
2. $\Delta^!(\tilde{u}_0\cdots\check{\tilde{u}}_i\cdots\tilde{u}_n):=(-1)^{n+i}f_i\ (i=0,1,\cdots,n)$,
3. $\Delta^!(\tilde{u}_I\tilde{v}^i):=0\quad(\#I\le n-1,\ 0\le i)$

で定めると, $[\Delta^!]$ は $\mathrm{Ext}^n_{(\Lambda V)^{\otimes 2}}(\Lambda V,(\Lambda V)^{\otimes 2})\cong\mathbb{Q}$ の生成元である.

次の記号を導入する.

定義 3.2. V の元の組 $x_1,\cdots,x_n$ に対して, $\Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda(sV)$ の元を

$$
A(x_1,\cdots,x_n):=\sum_{j=1}^{n} x_1\cdots x_{j-1}\otimes x_{j+1}\cdots x_n\otimes\tilde{x}_j
$$

と定める.

3.1 双対ループ積の非自明性について

Dlp のモデル (2.2) おける各 $\bar{\varepsilon} \otimes 1$ に対する切断は次で与えられる.

補題 3.3. $\varphi : \mathcal{M}_{LX} \to \Lambda V \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(sV) \otimes \Lambda(sV)$ を

$$\begin{aligned}
\varphi(x \otimes 1) &:= 1 \otimes x \otimes 1 \otimes 1, (x \in \Lambda V),\\
\varphi(1 \otimes \tilde{u}_i) &:= 1 \otimes 1 \otimes \tilde{u}_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \tilde{u}_i, (i = 0, \cdots, n),\\
\varphi(1 \otimes \tilde{v}) &:= 1 \otimes 1 \otimes \tilde{v} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \tilde{v} - \sum_{j \neq k} F_{j,k} \otimes (\tilde{u}_j \tilde{u}_k \otimes 1 + \tilde{u}_j \otimes \tilde{u}_k),
\end{aligned}$$

$$F_{j,k} := \int_0^1 \left(\prod_{i<j, i \neq k} (1 \otimes u_i) \prod_{j<i, i \neq k} \{(1-t)1 \otimes u_i + t u_i \otimes 1\} \right) t dt$$

$$\psi : \Lambda V \otimes \Lambda(sV) \otimes \Lambda(sV) \to \Lambda V \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(sV) \otimes \Lambda(sV) \otimes \Lambda(sV)$$

を

$$\begin{aligned}
\psi(x \otimes 1 \otimes 1) &:= 1 \otimes x \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, \quad (x \in \Lambda V),\\
\psi(1 \otimes \tilde{u}_i \otimes 1) &:= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \tilde{u}_i \otimes 1,\\
\psi(1 \otimes \tilde{v} \otimes 1) &:= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \tilde{v} \otimes 1 - \sum_{k=0}^{n} A(u_0, \cdots, \check{u}_k, \cdots, u_n) \otimes \tilde{u}_k \otimes 1,\\
\psi(1 \otimes 1 \otimes \tilde{y}) &:= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \tilde{y}, \quad (\tilde{y} \in \Lambda(sV) \subset \mathcal{M}_{LX})
\end{aligned}$$

と定めると, これらは DG 代数の射であり, 各 $\bar{\varepsilon} \otimes 1$ の切断である.

定理 3.4. ある非自明なコホモロジー類 $[\gamma_n]$ に対して, $a(j)$, $b(j) \in \Lambda V$ を用いて

$$\mathrm{Dlp}([\gamma_n]) = \sum_{j=0}^{n} a(j) \tilde{u}_0 \cdots \check{\tilde{u}}_j \cdots \tilde{u}_n \otimes \tilde{u}_0 \cdots \tilde{u}_n + b(j) \tilde{u}_0 \cdots \tilde{u}_n \otimes \tilde{u}_0 \cdots \check{\tilde{u}}_j \cdots \tilde{u}_n$$

と表わせる.

予想 3.5. Dlp は非自明である.

3.2 双対ループ余積の非自明性について

Dlcop のモデル (2.4) における $\bar{\varepsilon} \otimes 1$ に対する section は次で与えられる.

補題 3.6. $\eta : \Lambda V \otimes \Lambda(sV) \otimes \Lambda(sV) \to \Lambda V \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(sV) \otimes \Lambda(sV) \otimes \Lambda(sV)$ を

$$\begin{aligned}
\eta(x \otimes (1 \otimes 1)) &:= (1 \otimes x \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1), (x \in \Lambda V),\\
\eta(1 \otimes (\tilde{u}_i \otimes 1)) &:= 1 \otimes (\tilde{u}_i \otimes 1) - (1 \otimes 1 \otimes \tilde{u}_i) \otimes (1 \otimes 1),\\
\eta(1 \otimes (1 \otimes \tilde{u}_i)) &:= 1 \otimes (1 \otimes \tilde{u}_i) + (1 \otimes 1 \otimes \tilde{u}_i) \otimes (1 \otimes 1),\\
\eta(1 \otimes (\tilde{v} \otimes 1)) &:= 1 \otimes (\tilde{v} \otimes 1) - (1 \otimes 1 \otimes \tilde{v}) \otimes (1 \otimes 1)\\
&\qquad - \sum_{j \neq k} F_{j,k} \otimes (\tilde{u}_j \tilde{u}_k \otimes 1 \otimes 1 + \tilde{u}_j \otimes \tilde{u}_k \otimes 1),\\
\eta(1 \otimes (1 \otimes \tilde{v})) &:= 1 \otimes (1 \otimes \tilde{v}) + (1 \otimes 1 \otimes \tilde{v}) \otimes (1 \otimes 1)\\
&\qquad - \sum_{j \neq k} F_{j,k} \otimes (\tilde{u}_j \tilde{u}_k \otimes 1 \otimes 1 + \tilde{u}_j \otimes 1 \otimes \tilde{u}_k)
\end{aligned}$$

と定めると, これは DG 代数の射であり, 求める切断となっている. ここで, $F_{j,k}$ は補題 3.3 で定めたもの.

定理 3.7. Dlcop は非自明である. 実際,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dlcop}(1 \otimes \tilde{u}_0 \cdots \check{\tilde{u}}_k \cdots \tilde{u}_n) =& (-1)^n u_0 \cdots \check{u}_j \cdots u_n \otimes 1\\
\neq& 0, \quad (k = 0, 1, \cdots, n)
\end{aligned}$$

である.

注 3.8. 上の議論において, 切断の取り方は一意ではない. 故に, 切断の取り方を変えれば Dlp や Dlcop を今回得られた結果より簡潔に記述出来る可能性がある.

参考文献

[1] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational homotopy theory*, Vol. 205 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.

[2] Yves Félix, John Oprea, and Daniel Tanré. *Algebraic models in geometry*, Vol. 17 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[3] Takahito Naito. String operations on rational gorenstein spaces. *arXiv preprint arXiv:1301.1785*, 2013.

[4] Takahito Naito. Computational examples of rational string operations on Gorenstein spaces. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, Vol. 22, No. 4, pp. 543–558, 2015.