ベンジャミン・オノ方程式の $B^{9/8}_{2,1}(\mathbf{R})$ における時間局所適切性について

板坂健太 (Kenta Itasaka)
北海道大学大学院理学院数学専攻修士課程 1 年

1 序論

本稿では, ベンジャミン・オノ方程式と呼ばれる次の偏微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + H\partial_{xx}u + uu_x = 0 \quad (t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

ここで H は, ヒルベルト変換である. 計算すれば容易に分かるように, u がベンジャミン・オノ方程式の解であるとき, $\lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ もまた解である (スケール普遍性). ソボレフ空間 $H^s(\mathbf{R})$ における初期値問題の適切性については, [2], [4], [5] などの結果がある. [4] では $s > 5/4$, [2] では $s > 9/8$, [5] では $s \geq 1$ に対する適切性が示された. 以上の結果を基にして, ベゾフ空間における初期値問題の適切性を調べるという発想は自然である. そこで, 本稿ではベンジャミン・オノ方程式のベゾフ空間における適切性を扱う.

ベゾフ空間を定義するために, まずはリトルウッド・ペイリー作用素の定義を述べる.

定義 1 (リトルウッド・ペイリー作用素)**.** $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset C_0^{\infty}$ は, 以下を満たすとする:

$$\operatorname{supp}\varphi_0 \subset [-2,\ 2], \quad \operatorname{supp}\varphi_j \subset [2^{j-1},\ 2^{j+1}] \ \ (j \geq 1)$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j = 1.$$

この $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ に対して, リトルウッド・ペイリー作用素 Δ_j, $\widetilde{\Delta_j}$ を

$$\mathcal{F}\Delta_j = \varphi_j \mathcal{F}$$
$$\widetilde{\Delta_j} = \Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1}$$

と定める.

Δ_j を用いてベゾフ空間が定義できる.

定義 2 (ベゾフ空間)**.** ベゾフノルム $\|\cdot\|_{B^s_{p,q}}$ とベゾフ空間 $B^s_{p,q}(\mathbf{R})$ を以下で定義する:

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \|\Delta_0 f\|_{L^p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|^q_{L^p} \right)^{\frac{1}{q}},$$
$$B^s_{p,q}(\mathbf{R}) = \{ f \in \mathcal{S}' \,;\, \|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty \}.$$

以下, $B^s_{p,q}(\mathbf{R})$ を $B^s_{p,q}$ と書く. このとき, H^s と $B^s_{2,2}$ は同型であることが知られている. 従って, 特に

$$\frac{1}{c}\|f\|_{H^s} \leq \|\Delta_0 f\|_{L^2} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{2js} \|\Delta_j f\|^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\|f\|_{H^s}$$

が成り立っている. [2], [4] ではこの同値性を利用し, 各 $\Delta_j u$ の評価から $\|u\|_{H^s}$ の評価を得ている. このように $\Delta_j u$ の形で議論を進めるため, ベゾフ空間 $B^s_{2,1}$ においても同じような議論で初期値問題の適切性が言えるのではないかと期待できる.

2　主結果

このような考察を基にして, ベンジャミン・オノ方程式の $B^{9/8}_{2,1}$ における時間局所適切性を示した. 正確には次の結果である.

定理 1. 任意の $u_0 \in B^{9/8}_{2,1}$ に対して, $T \geq c\|u_0\|^{-4}_{B^{9/8}_{2,1}}$ と以下を満たすベンジャミン・オノ方程式の解 u が一意的に存在する:

$$u \in C([0,T] : B^{9/8}_{2,1}), \qquad \partial_x u \in L^1([0,T] : L^\infty).$$

また, 任意の $R > 0$ に対して, 解作用素 $u_0 \mapsto u(t)$ は $\{u_0 \in B^{9/8}_{2,1} : \|u_0\|_{B^{9/8}_{2,1}} < R\}$ から $C([0,T] : B^{9/8}_{2,1})$ への作用素として連続である.

以下, 証明の方針と核となる評価について述べる. まず, 次のエネルギー型の不等式が重要である.

補題 1. $s > 0$ とし, u をベンジャミン・オノ方程式の滑らかな解とする. このとき,

$$\|u\|_{L^\infty_T : B^s_{2,1}} \leq c\,\|u_0\|_{B^s_{2,1}} \exp\left(c\|\partial_x u\|_{L^1_T : L^\infty}\right)$$

が成立する.

もし $s > 1$ であれば, この不等式は微分が $s-1$ 回分だけ下がったことを意味する. また, 初期値 $u_{0,n}$ に対する解を u_n としたとき, $\|u_{0,n}\|_{B^{9/8}_{2,1}} \leq c$ かつ $\|\partial_x u_n\|_{L^1_T : L^\infty} \leq c$ であれば, $\|u_n\|_{L^\infty_T : B^s_{2,1}} \leq c$ が成り立つことも分かる. ベンジャミン・オノ方程式はスケール普遍性を持つので, 初期値が十分小さい場合を考えれば十分である. 定理 1 の証明の方針は, $\|u_0\|_{B^{9/8}_{2,1}}$ が十分小さい初期値の族に対して $\|\partial_x u\|_{L^1_T : L^\infty}$ が一様に有界になることを示し, コンパクト性の議論を用いるというものである. 従って, $\|\partial_x u\|_{L^1_T : L^\infty}$ に対する評価が重要である. [2] では, $H^s (s > 9/8)$ に対する同様の定理が示されており, $\|\partial_x u\|_{L^1_T : L^\infty}$ に対する評価の中で local smoothing effect と呼ばれる評価式が本質的な役割を果たしている. そこでの local smoothing effect はリトルウッド・ペイリー分解する前の元々の関数に対するものであるが, ベゾフ空間の場合に適用するには $\Delta_j u$ に対する local smoothing effect が必要である. この要請から, [3] の議論を基にして以下の不等式を導いた.

補題 2. ベンジャミン・オノ方程式の滑らかな解 u に対して次が成り立つ:

$$\left(\int_0^T \int_{\mathbf{R}} |D_x^{1/2}\partial_x \Delta_j u(x,t)|^2 \chi_k'(x) dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq c\left(1 + \|\partial_x u\|_{L^1_T : L^\infty} + \|u\|_{H^l}\right) 2^j \sum_{i \geq j-3} \|\Delta_i u\|_{L^\infty_T : L^2}.$$

ここで, χ は非減少かつ χ' のサポートが $(-1,2)$ に含まれ $[0,1]$ 上 $\chi' = 1$ となるような関数で, $\chi_k(x) = \chi(x-k)$ $(k \in \mathbf{Z})$ である. また, $l > 1/2$ である.

補題 2 は微分が 1/2 回分だけ下がったことを表している. この補題を用いれば, 後は [2] とほとんど同様の議論で定理が証明できる. 以下, この補題の証明を述べる. まず, 次の二つの補題が必要である.

補題 3 (J. Ginibre and G. Velo [1])**.** $h \in C^\infty(\mathbf{R})$ とし, h' はコンパクトサポートを持つとする. このとき,

$$\int_{\mathbf{R}} f\,(D_x \partial_x\, f)\, h\, dx \;=\; \int_{\mathbf{R}} (D_x^{1/2}\, f)^2\, h'\, dx \;+\; \int_{\mathbf{R}} f\, R(h) f\, dx$$

が成り立つ. ただし $R(h)$ は, $\|R(h)f\|_{L^2} \leq c\,\|\widehat{D_x h'}\|_{L^1}\,\|f\|_{L^2}$. を満たす.

補題 4 (H. Koch and N. Tzvetkov [4])**.**

$$\|\partial_x \Delta_j [f\,g] \,-\, f\,\partial_x \Delta_j g\|_{L^2} \leq c\|\partial_x f\|_{L^\infty}\,\|g\|_{L^2}$$

ここで, c は j に依存しない.

補題 2 の証明. $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset C_0^{\infty}$ をうまくとると $\Delta_j = \Delta_j \widetilde{\Delta_j}$ が成り立つようにできるので, 以下ではそれを仮定する. u は以下を満たす.

$$\partial_t u + D_x \partial_x u + u\, u_x = 0$$

$\partial_x \Delta_j$ を作用させて,

$$\partial_t \partial_x \Delta_j u + D_x \partial_x \partial_x \Delta_j u + \partial_x \Delta_j [u\, u_x] = 0$$

が成り立つ. さらに, $\partial_x \Delta_j u\, \chi_k$ をかけて積分すると補題 3 より,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (\partial_x \Delta_j u)^2 \chi_k + \int_{\mathbf{R}} (D_x^{1/2} f)^2 \chi_k' \, dx \\ &+ \int_{\mathbf{R}} f\, R(\chi_k) f \, dx \,+\, \int_{\mathbf{R}} \partial_x \Delta_j [u\, u_x]\, \partial_x \Delta_j u\, \chi_k = 0 \end{aligned}$$

となる. 時間に関して積分し移項すれば, 不等式の左辺が出てくる. ヘルダーの不等式を考えれば, 最後の項だけが問題であることが分かる. そこで最後の項に対する評価を与える.

$$\begin{aligned} \partial_x \Delta_j [u\, u_x] =& \partial_x \Delta_j [u\, (1 - \widetilde{\Delta_j}) u_x] \,+\, u\, \partial_x \partial_x \Delta_j u \\ &+\, \partial_x \Delta_j [u\, \partial_x \widetilde{\Delta_j} u] \,-\, u\, \partial_x \Delta_j \partial_x \widetilde{\Delta_j} u \end{aligned}$$

と分解する.

$$\Delta_j [u\, (1 - \widetilde{\Delta_j}) u_x] = \sum_{i \geq j-3} \Delta_j [\Delta_i u\, (1 - \widetilde{\Delta_j}) u_x]$$

より, 一項目は問題ない. 二項目は部分積分法によって処理できる. 残りに対して, 補題 4 を $f = u$, $g = \partial_x \widetilde{\Delta_j} u$ として適用すれば証明が完了する. □

参考文献

[1] J. Ginibre and G. Velo, *Commutator expansions and smoothing properties of generalized Benjamin-Ono equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phis. Théor **51** (1989), no. 2, 221–229.

[2] C. E. Kenig and K. D. Koenig, *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations*, Mathematical Research Letters **10** (2003), no. 5/6, 879–896.

[3] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Journal of the American Mathematical Society **4** (1991), no. 2, 323–347.

[4] H. Koch and N. Tzvetkov, *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^s(\mathbf{R})$*, International Mathematics Research Notices **2003** (2003), no. 26, 1449–1464.

[5] T. Tao, *Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^1(\mathbf{R})$*, Journal of Hyperbolic Differential Equations **1** (2004), no. 01, 27–49.