

細い柱状の弾性体の固有振動

Albert RODRÍGUEZ MULET (北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程)*

以下の主結果は神保秀一氏(北大理)との共同研究による。

1. 序

本講演においては細い一様等方的な弾性体の固有振動の問題を考える。等方的且つ一様な3次元の弾性体における振動が下記の波動方程式で表すことができる。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] & \text{in } \Omega \\ u = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_1, \quad \sigma(u) \cdot \nu = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_2 \end{cases} \quad (1)$$

ここで $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ は未知関数(変位ベクトル)とし, $L[u]$ はラメ作用素であり, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ は弾性体に対応する有界領域, Γ_1, Γ_2 は境界 $\partial\Omega$ の充分滑らかな部分集合で $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ を満たし, ν は Γ_2 上の外向き単位法線ベクトルである。物体を Γ_1 上で固定している。そして, Γ_2 上で力が作用していない場合を考える。

$$e(u) = \frac{1}{2} ((\nabla u)^T + \nabla u) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq 3)$$

とし, 歪みテンソル (*strain tensor*) と呼ぶ。更に, 応力テンソル (*stress tensor*) は

$$\sigma(u) = \lambda_1 \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id}_3 + 2\lambda_2 e(u) \quad (\text{一様等方的な弾性体の Hooke の法則による})$$

である。ここで, Id_3 は 3 次の単位行列であり, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ はラメ定数と呼び, 弾性体の材質などに依存する定数である。そして, ラメ作用素は次のように定義する。

$$L[u] = \operatorname{div}(\sigma(u))$$

ラメ作用素は実際楕円型作用素であることを示すことができる (cf.[2])。

振動は周期的振動である場合を考える。即ち, 周期を $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ とおき,

$$u(x, t) = e^{i\sqrt{\mu}t} v(x)$$

とする。すると, (1) は

$$\begin{cases} L[u] + \mu u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_1, \quad \sigma(u) \cdot \nu = 0 & \text{on } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2)$$

という固有値問題となる。冒頭の問題はラメ作用素のスペクトル解析と書き直すことができた。(2) はゼロ以上の実数列からなる固有値たちを持つことが知られている (cf.[1])。弾性体については Ciarlet 氏の本 [1] には板の形にした弾性体の研究が載っている。こういう形を解析すると, 地球の表面における地震の研究に応用がある。そして, 更に正確に研究するために, 地球の表面は平坦ではなく曲がっていると考えられる。故に次の一步として弾性体がシェルの形をしている時についても書いてある。

* e-mail: albertromu@math.sci.hokudai.ac.jp

一方、建物における振動を調べるために、建物が板や棒で構成されていると考えられる。そのため、柱の場合は Ciarlet 氏の研究と関連している。

他にも、[3] などにラメ作用素などを含む 2 階楕円型作用素の様々な境界条件の場合について書かれている。

本発表では、 $\widehat{\Omega}$ を充分滑らかな境界を持つ \mathbb{R}^2 有界単連結開集合とし、 $\varepsilon > 0, l > 0$ とする。3次元の細い柱状領域 Ω_ε を以下のように定める。

$$\begin{aligned}\Omega_\varepsilon &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \varepsilon\widehat{\Omega}, 0 < x_3 < l\} \\ \Gamma_{1,\varepsilon} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \varepsilon\partial\widehat{\Omega}, x_3 = 0 \text{ or } l\} \\ \Gamma_{2,\varepsilon} &= \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_{1,\varepsilon}.\end{aligned}$$

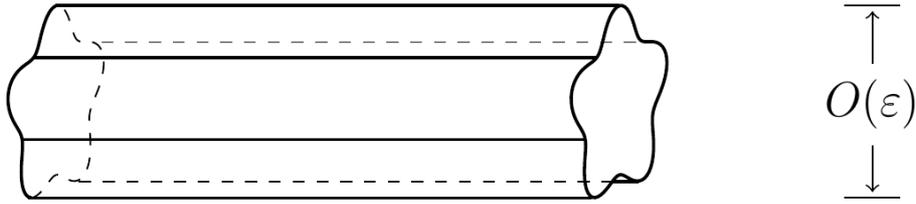


図 1: 星形柱体

$\widehat{\Omega}$ が円の場合は橋本浩平氏の [4] で議論され、低周波の固有振動について研究された。この固有値問題における成果をより一般的な範囲で議論する。

2. 主結果

主結果を述べるために、 2×2 行列 A を定める。 A の (i, j) 成分は

$$A_{ij} = \int_{\widehat{\Omega}} x_i x_j dx_1 dx_2 - \frac{1}{|\widehat{\Omega}|} \left(\int_{\widehat{\Omega}} x_i dx_1 dx_2 \right) \left(\int_{\widehat{\Omega}} x_j dx_1 dx_2 \right) \quad (1 \leq i, j \leq 2)$$

で与えられる。 A は正定値実対称行列となる。その固有値を α_1, α_2 とする。

定理 2.1. $\Omega = \Omega_\varepsilon$ とした固有値問題 (2) の第 k 固有値を $\mu_k(\varepsilon)$ とすると、以下が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \widetilde{\Lambda}_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

但し、

$$\{\widetilde{\Lambda}_k\}_{k=1}^{+\infty} = \{\alpha_1 \Lambda_k, \alpha_2 \Lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$$

であり、 Λ_k は 4 階の常微分作用素の固有値問題

$$\begin{cases} \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{|\widehat{\Omega}|(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{d^4 \eta}{d\tau^4} = \Lambda \eta & (0 < \tau < l) \\ \eta(0) = \eta(l) = \frac{d\eta}{d\tau}(0) = \frac{d\eta}{d\tau}(l) = 0 \end{cases}$$

の第 k 固有値を表している。

さて、上記の常微分方程式の固有値と固有関数の具体的な式を考えてみよう。即ち、常微分方程式の一般解は

$$\eta(\tau) = C_1 \sin(\sqrt[4]{\Theta}\tau) + C_2 \cos(\sqrt[4]{\Theta}\tau) + C_3 e^{\sqrt[4]{\Theta}\tau} + C_4 e^{-\sqrt[4]{\Theta}\tau}$$

である。但し、 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ であり、 $\frac{\lambda_2(3\lambda_1+2\lambda_2)}{|\widehat{\Omega}|(\lambda_1+\lambda_2)}\Theta = \Lambda$ である。境界条件から $\eta(\tau) = 0, 0 \leq \tau \leq l$ は自明な解であることが分かる。

境界条件を満たす非自明な解が存在するための Λ を求める。 $\{\zeta_m\}_{m=1}^{+\infty}$ を関数

$$Z(s) = (e^s + e^{-s}) \cos s - 2 \quad (s > 0)$$

のゼロ点とする。更に $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$\Lambda_m = \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{|\widehat{\Omega}|(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\zeta_m}{l} \right)^4$$

とすると、自明でない解が得られる。従って、

$$\{\tilde{\Lambda}_k\}_{k=1}^{+\infty} = \left\{ \alpha_1 \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{|\widehat{\Omega}|(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\zeta_k}{l} \right)^4, \alpha_2 \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{|\widehat{\Omega}|(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\zeta_k}{l} \right)^4 \right\}_{k=1}^{+\infty}$$

であり、(2)の固有値をほぼ陽的に書き直すことができた。

これから、柱が傾いている場合と比較する。 $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ を固定する。集合 $\Omega_{\varepsilon, (v_1, v_2)}, \Gamma_{1, \varepsilon, (v_1, v_2)}, \Gamma_{2, \varepsilon, (v_1, v_2)}$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned} \Omega_{\varepsilon, (v_1, v_2)} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) - x_3(v_1, v_2) \in \varepsilon \widehat{\Omega}, 0 < x_3 < l\} \\ \Gamma_{1, \varepsilon, (v_1, v_2)} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) - x_3(v_1, v_2) \in \varepsilon \partial \widehat{\Omega}, x_3 = 0 \text{ or } l\} \\ \Gamma_{2, \varepsilon, (v_1, v_2)} &= \partial \Omega_{\varepsilon, (v_1, v_2)} \setminus \Gamma_{1, \varepsilon, (v_1, v_2)}. \end{aligned}$$

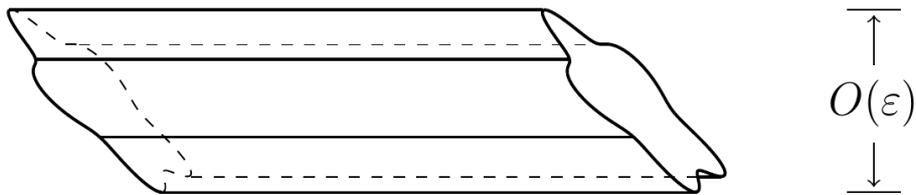


図 2: 傾いている星形柱体

この場合の固有値の挙動は以下のように書くことができる。

定理 2.2. $\Omega = \Omega_{\varepsilon, (v_1, v_2)}$ とした固有値問題 (2) の第 k 固有値を $\mu_k(\varepsilon, (v_1, v_2))$ とすると、以下が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_k(\varepsilon, (v_1, v_2))}{\varepsilon^2} = \Lambda_k^\#$$

但し、

$$\{\Lambda_k^\#\}_{k=1}^{+\infty} = \{\alpha_1^\# \Lambda_{k, (v_1, v_2)}, \alpha_2^\# \Lambda_{k, (v_1, v_2)}\}_{k=1}^{+\infty}$$

であり, $\Lambda_{k,(v_1,v_2)}$ は4階の常微分作用素の固有値問題

$$\begin{cases} \sqrt{1+v_1^2+v_2^2} \frac{\lambda_2(3\lambda_1+2\lambda_2)}{|\widehat{\Omega}|(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{d^4\eta}{d\tau^4} = \Lambda\eta & \left(0 < \tau < l\sqrt{1+v_1^2+v_2^2}\right) \\ \eta(0) = \eta\left(l\sqrt{1+v_1^2+v_2^2}\right) = \frac{d\eta}{d\tau}(0) = \frac{d\eta}{d\tau}\left(l\sqrt{1+v_1^2+v_2^2}\right) = 0 \end{cases}$$

の第 k 固有値を表しており, $\alpha_1^\sharp, \alpha_2^\sharp$ は正定値実対称行列

$$\begin{pmatrix} (1+v_1^2+v_2^2)^{-\frac{3}{2}}A_{11} & (1+v_1^2+v_2^2)^{-1}A_{12} \\ (1+v_1^2+v_2^2)^{-1}A_{12} & (1+v_1^2+v_2^2)^{-\frac{1}{2}}A_{22} \end{pmatrix}$$

の固有値である.

他に,

$$\Omega_{f,\varepsilon} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \varepsilon f(x_3)\widehat{\Omega}, 0 < x_3 < l\}$$

非一様な太さの柱についても同様の解析を行うことができる.

証明には変分法, Min-Max 原理や Korn の不等式などを用いた.

3. 例

例として Ω_ε を円柱とする. 従って, $\widehat{\Omega} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

固有値と固有関数を特徴付けることができる. $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ である故,

$$\{\widetilde{\Lambda}_k\}_{k=1}^{+\infty} = \left\{ \frac{\lambda_2(3\lambda_1+2\lambda_2)}{4(\lambda_1+\lambda_2)} \left(\frac{\zeta_k}{l}\right)^4 \right\}_{k=1}^{+\infty}$$

となる. これより, 円柱の場合は固有値が重複していることが分かる. 更に, Λ_m に対応する固有関数は

$$\begin{aligned} \eta_m(\tau) = & (e^{\zeta_m} + e^{-\zeta_m} - 2\cos\zeta_m) \sin\left(\frac{\zeta_m}{l}\tau\right) + (2\sin\zeta_m + e^{-\zeta_m} - e^{\zeta_m}) \cos\left(\frac{\zeta_m}{l}\tau\right) \\ & + (\cos\zeta_m - \sin\zeta_m - e^{-\zeta_m}) e^{\frac{\zeta_m}{l}\tau} + (e^{\zeta_m} - \sin\zeta_m - \cos\zeta_m) e^{-\frac{\zeta_m}{l}\tau} \end{aligned}$$

となる. $\Phi_{k,\varepsilon}$ を $\mu_k(\varepsilon)$ に対応する固有関数とする. ならば $\widetilde{\Phi}_{k,\varepsilon}(y_1, y_2, y_3) = \Phi_{k,\varepsilon}(\varepsilon y_1, \varepsilon y_2, y_3)$ とおくと

$$\widetilde{\Phi}_{k,\varepsilon} \rightharpoonup \widetilde{\Phi}_k \quad \text{in } H^1(\Omega_1, \mathbb{R}^3) \quad (\text{as } \varepsilon \rightarrow 0)$$

が成り立つ. ここで

$$\widetilde{\Phi}_k(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \Phi_{\frac{k+1}{2}}(y_1, y_2, y_3) & \text{if } k \text{ 奇数} \\ \Phi_{\frac{k}{2}}(y_1, y_2, y_3) & \text{if } k \text{ 偶数} \end{cases}$$

であり, Φ_m は

$$\Phi_m(y_1, y_2, y_3) = \left(c_1\eta_m(y_3), c_2\eta_m(y_3), -c_1y_1 \frac{d\eta_m}{dy_3}(y_3) - c_2y_2 \frac{d\eta_m}{dy_3}(y_3) \right) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

を指す. ここから柱の振動モードの形状も分かる.

そして、柱が傾いている場合と比べよう。 $\alpha_1^\sharp = \frac{\pi}{4(\sqrt{1+v_1^2+v_2^2})^3}$, $\alpha_2^\sharp = \frac{\pi}{4\sqrt{1+v_1^2+v_2^2}}$ であり,
 $E = \frac{\lambda_2(3\lambda_1+2\lambda_2)}{\lambda_1+\lambda_2}$ とおくと

$$\begin{aligned} \{\Lambda_k^\sharp\}_{k=1}^{+\infty} &= \left\{ \alpha_1^\sharp \Lambda_{k,(v_1,v_2)}, \alpha_2^\sharp \Lambda_{k,(v_1,v_2)} \right\}_{k=1}^{+\infty} \\ &= \left\{ \alpha_i^\sharp \sqrt{1+v_1^2+v_2^2} \frac{E}{\pi} \left(\frac{\zeta_k}{l\sqrt{1+v_1^2+v_2^2}} \right)^4 \right\}_{k=1}^{+\infty} \quad (i=1,2) \\ &= \left\{ \frac{1}{1+v_1^2+v_2^2} \frac{E}{4} \left(\frac{\zeta_k}{l\sqrt{1+v_1^2+v_2^2}} \right)^4, \frac{E}{4} \left(\frac{\zeta_k}{l\sqrt{1+v_1^2+v_2^2}} \right)^4 \right\}_{k=1}^{+\infty} \\ &= \left\{ \frac{1}{(1+v_1^2+v_2^2)^3} \frac{E}{4} \left(\frac{\zeta_k}{l} \right)^4, \frac{1}{(1+v_1^2+v_2^2)^2} \frac{E}{4} \left(\frac{\zeta_k}{l} \right)^4 \right\}_{k=1}^{+\infty} \\ &= \left\{ \frac{\tilde{\Lambda}_k}{(1+v_1^2+v_2^2)^3}, \frac{\tilde{\Lambda}_k}{(1+v_1^2+v_2^2)^2} \right\}_{k=1}^{+\infty} \end{aligned}$$

を得る。これより分かるのは、 v_1, v_2 が大きくなっていくと、固有値が小さくなる。更に、真っ直ぐな円柱の場合は対称性があったため、 x_1 方向と x_2 方向の振動は同じように挙動したのに、若干斜めになると対称性が消える。

参考文献

- [1] P.G.Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volumes I, II and III*, North-Holland, 1988, 1997, 2000
- [2] G.Duvaut, J.L.Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1976, translated by C.W.John
- [3] V.Maz'ya, S.Nazarov, B.Plamenevskij, *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains Volumes I and II*, Birkhäuser, 2000
- [4] 橋本浩平, 細い弾性体の固有振動, 北海道大学修士論文, 2009