非線形波動方程式の解の大域存在と爆発

櫻庭みく
室蘭工業大学大学院工学研究科情報電子工学系専攻博士前期課程

1 序論

次の空間 3 次元上の時間減衰する重みが非線形項についた, 非線形波動方程式を考える.

$$\Box u(x,t) = (1+t)^{-(p-1)}|u(x,t)|^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \epsilon f(x), \quad u_t(x,0) = \epsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.2}$$

ここで, $p > 1$, $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$($f \not\equiv 0$ または $g \not\equiv 0$), $\epsilon > 0$ とし, $\Box$ を次で定義する.

$$\Box = \partial_t^2 - \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2$$

さらに, 初期値 $f(x), g(x)$ の台が半径 ρ の球の中に含まれていると仮定する.

$$f(x) = g(x) = 0 \quad |x| > \rho$$

本研究の目的の 1 つ目は, ϵ を十分小さくした場合に, (1.1), (1.2) の時間大域解の存在と非存在を明らかにすることである. 具体的には, ある critical exponent p^* が存在して $p > p^*$ のとき, 十分小さい ϵ に対して (1.1), (1.2) の時間大域解が存在し, $p \le p^*$ のとき, 解が有限時刻で爆発することを示す. 2 つ目は, (1.1), (1.2) の爆発解のライフスパン $T(\epsilon)$ を求めることである. ライフスパン $T(\epsilon)$ とは解の最大存在時間で, 解 u が存在する最大の T である.

(1.1), (1.2) の解として, $p < 2$ のときは, 次の積分方程式の解 $u(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ を考える.

$$u(x,t) = u^0(x,t) + L\phi(x,t) \tag{1.3}$$

ここで, u^0 は線形波動方程式 $\Box u(x,t) = 0$ と初期条件 (1.2) を満たす解で, 作用素 L と $\phi(t,u)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} Lw(x,t) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^t ds(t-s)\int_{|\eta|=1} w(x+(t-s)\eta, s)d\omega_\eta, \\ \phi(t,u) &= (1+t)^{-(p-1)}|u|^p. \end{aligned}$$

$p \ge 2$ のときは, (1.3) の解 $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ は (1.1), (1.2) の解となっている.

次の半線形波動方程式 (1.4), (1.5) について, 1979 年に F.John [3] は ϵ を十分小さくした場合の時間大域解の存在と非存在に関する研究を $n = 3$ のときに関して行なった.

$$\Box v(x,t) = |v(x,t)|^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \tag{1.4}$$

$$v(x,0) = \epsilon f(x), \quad v_t(x,0) = \epsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

具体的には, [3] で次が示されている.

$$\begin{aligned} p > 1+\sqrt{2}, \quad \epsilon << 1 \quad &\Rightarrow \quad T(\epsilon) = \infty \\ 1 < p < 1+\sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad T(\epsilon) < \infty \end{aligned}$$

T.Kato [4] は $n = 1$ のとき, $p > 1$ に対して大域解の非存在について示した. 他の次元において Strauss [6] は次の予想を立てた.

$$\begin{aligned} p > p_0(n), \quad \epsilon << 1 \quad &\Rightarrow \quad T(\epsilon) = \infty \\ 1 < p \le p_0(n) \quad &\Rightarrow \quad T(\epsilon) < \infty \end{aligned}$$

ここで $p_0(n) := \frac{n+1+\sqrt{n^2+10n-7}}{2(n-1)}$ $(n \ge 2)$ である. その後, R.T.Glassey [2] が 1980 年に $n = 2$ の場合, T.S.Sideris [5] が 1984 年に $n = 4$ の場合に, Strauss の予想が正しいことを示している. Strauss 指数と呼ばれる $p_0(n)$ は, 具体的には, $p_0(1) = \infty$, $p_0(2) = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $p_0(3) = 1+\sqrt{2}$, $p_0(4) = 2$, $p_0(5) = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$, $\cdots$ と空間次元が大きくなるほど小さくなる. これは, (1.4), (1.5) に対応する線形方程式の解 $u^0(x,t)$ の減衰オーダーが

$$|u^0(x,t)| < \frac{C}{t^{\frac{1}{2}(n-1)}} \quad C: \text{定数}$$

と次元が高くなるほど早く減衰することに起因している.

ライフスパンに関しては, [3] で $n = 3, p = 2$ のときに, 次のような評価が得られている.

$$A\epsilon^{-2} < T(\epsilon) < B\epsilon^{-2}$$

2　主定理

今回, 次のような結果が得られた.

定理 2.1. *$p > \frac{3+\sqrt{17}}{4} = p_0(5)$ のとき, ϵ が十分小さいならば, (1.1), (1.2) の時間大域解が存在し, $1 < p \le \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ のとき, 解は有限時刻で爆発する.*

D'abbico, Lucente, Reissing [1] によって, $p > p_0(5)$ のとき, $f(x), g(x)$ が球対称と仮定して, ϵ が十分小さいならば時間大域解が存在し, $f(x), g(x) \ge 0$ のとき, $1 < p \le p_0(5)$ ならば有限時刻で爆発することが示されている. また, [1] ではライフスパンの評価は得られていなかったが, 今回は次のライフスパンに関する評価が得られた.

定理 2.2. *$\frac{3}{2} < p < \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ のとき, ある $A, B, \epsilon_0 > 0$ が存在して, (1.1), (1.2) の解のライフスパンに関して, 次が成立する.*

$$A\epsilon^{-\frac{p(p-1)}{\gamma(p)}} < T(\epsilon) < B\epsilon^{-\frac{p(p-1)}{\gamma(p)}} \quad (0 < \epsilon < \epsilon_0) \tag{2.1}$$

ここで, $\gamma(p) = -2p^2 + 3p + 1$

参考文献

[1] M.D'Abbicco, S.Lucente and M.Reissing, A shift in the Strauss exponent for semilinear wave equations with a not effective damping, (2015).

[2] R.T.Glassey, Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations, Math.Z., 177(1981), 323-340.

[3] F.John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, Manuscripta Math., 28(1979), 235-268.

[4] T.Kato, Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations, Comm.Pure Appl. Math, 33(1980), 501-505.

[5] T.C.Silderis, Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, J.Differential Equations, 52(1984), 378-406.

[6] W.A.Strauss, Nonlinear scattering theory at low energy, J.Funct. Anal., 41(1981), 110-133.