Distinguishing Rooted Trees by Their Order Quasisymmetric Functions

辻栄　周平 *（Shuhei TSUJIE）
北海道大学大学院理学研究院数学部門

概要

Richard P. Stanley により，chromatic symmetric function は木を区別するということが予想されている．半順序集合に対し，order quasisymmetric function を定義し，類似の問題について考えることができる．根付き木は order quasisymmetric function により区別されるという結果を紹介する．本研究は北海道大学の長谷部高広氏との共同研究である．

1　グラフの彩色

$G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ を有限単純グラフとする．写像 $f \colon V_G \to V_H$ が隣接関係を保つ，すなわち $\{u, v\} \in E_G$ ならば $\{f(u), f(v)\} \in E_H$ が成り立つとき，f は G から H への**準同型**と呼ばれる．$\mathrm{Hom}(G, H)$ で G から H への準同型全体のなす集合を表す．

K_n を頂点集合が $[n] \coloneqq \{1, \ldots, n\}$ である完全グラフとし，f を G から K_n への準同型とする．G の頂点 u, v が隣接しているならば，$\{f(u), f(v)\} \in E_{K_n}$，すなわち $f(u) \neq f(v)$ となる．よって，準同型 f は隣接している頂点には異なる色（K_n の頂点）をあてがうという**彩色**であると考えられる．n 色での G の彩色の総数 $\#\mathrm{Hom}(G, K_n)$ は n に関する次数が $|V_G|$ の多項式であることが割と簡単に分かる．これを**彩色多項式**（chromatic polynomial）といい，$\chi(G, n)$ で表す．

木（tree）とは閉路をもたない連結グラフのことである．T を木とすると，$\chi(T, n) = n(n-1)^{|V_T|-1}$ である．彩色多項式からは，T がどのような木であるかを復元することができない．彩色多項式はグラフの重要な不変量ではあるが，木を区別することは全くできないのである．たとえば，図 1 の 2 つの木 P_4, S_4 の彩色多項式はともに $n(n-1)^3$ である．

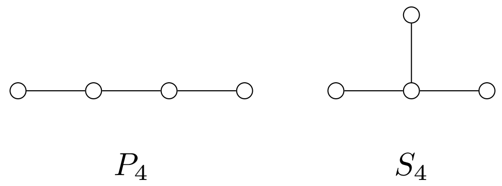


図 1　同型でない 2 つの木の例

* e-mail: tsujie@math.sci.hokudai.ac.jp

彩色の総数を単に数え上げる代わりに，各彩色に重みを与えて数え上げるということについて考えてみる．$x_1,\dots,x_n$ を不定元とする．彩色 $f\in \mathrm{Hom}(G,K_n)$ に対し，単項式 $\prod_{v\in V_G} x_{f(v)}$ を f の重みと考える．その総和

$$X(G,x_1,\dots,x_n)=\sum_{f\in \mathrm{Hom}(G,K_n)}\prod_{v\in V_G} x_{f(v)}$$

$x_1,\dots,x_n$ の対称式となる．色数 n が大きければ大きいほど対称式 $X(G,x_1,\dots,x_n)$ はより多くの情報をもつような気はするが，実はそんなことはなく n は G の頂点数より大きければ十分である．なぜなら，それ以上 n を大きくしても新たに得られる彩色は，すでに把握している彩色の色を適当に入れ替えたものしかないからである．しかし，グラフによって n の値をいろいろ取り換えて考えるというのでは不便である．どんな頂点数のグラフにも対応できるようにするためには，色の数を可算無限個にすればよい．

Definition 1.1. G を有限単純グラフとする．

$$X(G,\boldsymbol{x})=\sum_{f\in \mathrm{Hom}(G,K_{\mathbb{N}})}\prod_{v\in V_G} x_{f(v)}$$

を G の **chromatic symmetric function** という．ここで，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots)$ は可算無限個の不定元，$K_{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ 上の完全グラフである．

“function”とあるが，もちろん普通の意味での関数ではない．無限個の不定元で無限個の項からなるものなので，“polynomial”と呼ぶのも憚られたようで，本来の意味と比べると誤用ではあるが “function”という用語で定着している．

chromatic symmetric function は，その構成の仕方から分かる通り，彩色多項式よりも強い不変量である．実際，図 1 の 2 つの木 P_4,S_4 の chromatic symmetric funtion は

$$\begin{aligned}X(P_4,\boldsymbol{x})&=p_{1111}-3p_{211}+p_{22}+2p_{31}-p_4,\\X(S_4,\boldsymbol{x})&=p_{1111}-3p_{211}+3p_{31}-p_4\end{aligned}$$

となり，異なっていることがわかる．ただし，自然数 k に対し，$p_k=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$ とし，整数分割 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ に対し，$p_\lambda=p_{\lambda_1}\cdots p_{\lambda_\ell}$ とした．

Richard P. Stanley は以下のような予想を立てた．

Conjecture 1.2 (Stanley [2])**.** chromatic symmetric function は木を区別する．つまり，木 T_1,T_2 が $X(T_1,\boldsymbol{x})=X(T_2,\boldsymbol{x})$ を満たせば，T_1 と T_2 は同型である．

部分的な結果はいくつか知られているが，この予想は未解決である．

2 半順序集合の彩色

半順序集合にも彩色という概念を与え，グラフの彩色の類似について考えることができる．まず，半順序集合を対象とする圏の射をどのように設定するかが問題となるが，以下の 2 通りのも

のが自然であると考えられる．

$$\mathrm{Hom}^{<}(P,Q) = \{\, f\colon P \to Q \mid u < v \Rightarrow f(u) < f(v) \,\},$$
$$\mathrm{Hom}^{\leq}(P,Q) = \{\, f\colon P \to Q \mid u \leq v \Rightarrow f(u) \leq f(v) \,\}.$$

$[n] = \{1, \ldots, n\}$ を通常の順序が入った全順序集合と考える．有限半順序集合 P の彩色とは，P から $[n]$ への射のことである．n 色での彩色の総数を与える関数

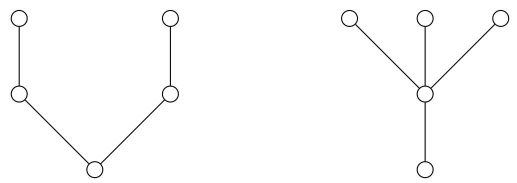
$$\Omega^{<}(P,n) \coloneqq \#\,\mathrm{Hom}^{<}(P,[n]),$$
$$\Omega^{\leq}(P,n) \coloneqq \#\,\mathrm{Hom}^{\leq}(P,[n]).$$

は，n の多項式となり，それぞれ **strict order polynomial**, **weak order polynomial** と呼ばれる．これら 2 つの多項式の間には以下の reciprocity があることが知られている．

$$\Omega^{<}(P,-n) = (-1)^{|P|}\Omega^{\leq}(P,n).$$

この等式によって，$\Omega^{<}(P,n) = \Omega^{<}(Q,n)$ と $\Omega^{\leq}(P,n) = \Omega^{\leq}(Q,n)$ は同値であることが分かる．我々は 2 通りの射を定義し，それぞれに応じて多項式を得た．しかし，半順序集合を区別するという立場から見ると，結局のところはどちらの多項式も同等であるといえる．

木と**根**（root）と呼ばれる頂点の組を**根付き木**（rooted tree）という．根付き木には根を最小元とする自然な順序構造が入る．order polynomial では根付き木を区別できない．たとえば，図 2 の 2 つの根付き木の strict order polynomial はともに $\frac{1}{60}n(n-1)(n-2)(3n^2-6n+1)$ である．



$[1] \oplus ([2] \sqcup [2])$ $\qquad$ $[2] \oplus ([1] \sqcup [1] \sqcup [1])$

図 2　同型でないが同じ order polynomial をもつ根付き木の例

chromatic symmetric function の半順序集合版を以下で定義する．

Definition 2.1. P を有限半順序集合とする．

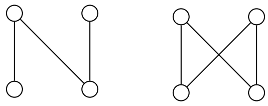
$$\Gamma^{<}(P,\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{f \in \mathrm{Hom}^{<}(P,\mathbb{N})} \prod_{v \in P} x_{f(v)},$$
$$\Gamma^{\leq}(P,\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{f \in \mathrm{Hom}^{\leq}(P,\mathbb{N})} \prod_{v \in P} x_{f(v)}.$$

$\Gamma^{<}, \Gamma^{\leq}$ をそれぞれ **strict order quasisymmetric function**, **weak order quasisymmetric function** とよぶ.

これらは, labeled poset に付随する quasisymmetric function の一種である. Order polynomial のときと同様に，$\Gamma^{<}(P,\boldsymbol{x}) = \Gamma^{<}(Q,\boldsymbol{x})$ と $\Gamma^{\leq}(P,\boldsymbol{x}) = \Gamma^{\leq}(Q,\boldsymbol{x})$ が同値であることが知られている．

3　主結果

図 3 の Hasse 図で表される半順序集合を部分半順序集合としてもたない半順序集合を $(N, \bowtie)$ 自由であるという．



N　　$\bowtie$

図 3　N と $\bowtie$ の Hasse 図

主結果は以下の通りである．

Theorem 3.1 (Hasese-T [1])**.** *P, Q を $(N, \bowtie)$ 自由な有限半順序集合とする．このとき，以下は同値．*

(1) $\Gamma^{<}(P, \boldsymbol{x}) = \Gamma^{<}(Q, \boldsymbol{x})$
(2) $\Gamma^{\leq}(P, \boldsymbol{x}) = \Gamma^{\leq}(Q, \boldsymbol{x})$
(3) P と Q は同型．

さらに，任意の根付き木は $(N, \bowtie)$ 自由であることが示せる．

Theorem 3.2 (Hasebe-T [1])**.** *Order quasisymmetric function は根付き木を区別する．*

参考文献

[1] T. Hasebe and S. Tsujie, Order Quasisymmetric Functions Distinguish Rooted Trees, *arXiv e-prints* (2016), 1610.03908.
[2] R. P. Stanley, A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph, *Adv. Math.* **111** (1995), no. 1, 166–194.