流多項式のオイラー標数相互律

宮谷　俊典 (北海道大学大学院理学院数学専攻修士 2 年)

概要

組み合わせ論的相互律とは二つの関連した数え上げ問題の間に生じるある種の双対性である．[3] において長谷部, 吉永氏によりオイラー標数相互律というものが定式化された．半代数的集合のオイラー標数は有限集合の濃度の一般化と考えることができる．オイラー標数相互律とはこの半代数的集合のオイラー標数と負集合を用いて組み合わせ論的相互律を幾何学的に実現したものである．オイラー標数相互律は order 多項式と彩色多項式で定式化されたが, 我々の目標は Breuer と Sanyal が証明した流多項式の組み合わせ論的相互律に対しオイラー標数相互律を定式化することである．

1　オイラー標数相互律

P を有限半順序集合とする．$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし, 通常の順序が入っているものとする．order 多項式 $\mathcal{O}^{\leq}(P, t) \in \mathbb{Q}[t]$ と strict order 多項式 $\mathcal{O}^{<}(P, t) \in \mathbb{Q}[t]$ とは次を満たす多項式のことである．

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{\leq}(P, n) &= \#\mathrm{Hom}^{\leq}(P, [n]), \\ \mathcal{O}^{<}(P, n) &= \#\mathrm{Hom}^{<}(P, [n]), \end{aligned} \tag{1}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \#\mathrm{Hom}^{\leq}(P, [n]) &= \{f : P \to [n] \mid x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\}, \\ \#\mathrm{Hom}^{<}(P, [n]) &= \{f : P \to [n] \mid x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\}. \end{aligned} \tag{2}$$

とした．このような多項式が存在することは Stanley により証明されている．Stanley はまた, 次のような相互律を証明した．([5], Theorem 3)

$$\mathcal{O}^{<}(P, t) = (-1)^{\#P} \mathcal{O}^{\leq}(P, -t). \tag{3}$$

$t = n$ と置くことにより, (3) は仮に次のように表すことができる．

$$\text{“}\#\mathrm{Hom}^{<}(P, [n]) = (-1)^{\#P} \#\mathrm{Hom}^{\leq}(P, [-n]).\text{”} \tag{4}$$

自然な問題として, 上の相互律を任意の半順序集合 P と Q の間の準同型の相互律として拡張できないだろうか. 即ちここで次のような定式化が期待される.

$$\text{“}\#\mathrm{Hom}^{<}(P,Q) = (-1)^{\#P}\#\mathrm{Hom}^{\leq}(P,-Q).\text{”} \tag{5}$$

もちろんこれは数学的に正当化できる公式ではない. 実際, “負半順序集合 $-Q$” というものは定義されていない. よって右辺は意味をなさない. まず最初に “負半順序集合” より一般に “負集合” とは何かについて考える. [4] において Schanuel は “負集合” とは何であるべきか, より正確に次の図式を可換にする圏 $\mathbb{E}$ と写像 $\mathbb{E} \to \mathbb{Z}$ は何であるべきか述べている.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \arrow[r, "inj"] \arrow[d, "\#"'] & \mathbb{E}? \arrow[d, "??"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "inj"'] & \mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

ここで $\mathbb{S}$ は, 有限集合のなす圏である. 一つの答えとして $\mathbb{E}$ を半代数的集合の集合, $\mathbb{E} \to \mathbb{Z}$ をそのオイラー標数ととることができる. ここで半代数的集合のオイラー標数を導入する.

Definition 1.1. $X \subset \mathbb{R}^n$ が半代数的集合であるとは, X が次の形の部分集合の Boole 結合 (つまり $\cup, \cap, \neg$ の有限個の結合) で表されていることである.

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}, \tag{6}$$

ここで, $p(x) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

$X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ を半代数的集合とし, $f : X \to Y$ をそれらの間の写像とする. f が半代数的であるとは,

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}^{m+n} \tag{7}$$

が半代数的集合であるときのことをいう. 例えば有限集合や開区間は半代数的集合である. 従って半代数的集合の圏は有限集合の圏を含んでいる. 任意の半代数的集合は, 開区間の直積に微分同相な半代数的集合への有限個の分割が存在する.

Definition 1.2. Nash 多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$ とは, 半代数的集合である解析的部分多様体のことである. Nash 写像 $M \to \mathbb{R}^n$ とは, 解析的かつ半代数的な写像のことである.

Definition 1.3. $\mathbb{R}^n$ 内の Nash cell とは, $(0,1)^d$ $(d \geq 0)$ に Nash 微分同相な $\mathbb{R}^n$ の Nash 部分多様体のことである.

任意の半代数的集合は Nash cell の非交和に分割することができる．即ち

$$X = \bigsqcup_{\alpha=1}^{k} X_\alpha \qquad (X_\alpha \simeq (0,1)^{d_\alpha} \text{ for some } d_\alpha \geq 0). \tag{8}$$

このとき X のオイラー標数を,

$$e(X) := \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{d_\alpha}. \tag{9}$$

と定義する．これは分割の仕方に依らない ([2])．さらにオイラー標数は次を満たす．

$$e(X \sqcup Y) = e(X) + e(Y), \tag{10}$$

$$e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y). \tag{11}$$

ここで次のような半代数的集合の例を考える．

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_d &= \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 < x_1 < \cdots < x_d < 1\}, \\ \sigma_d &= \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_d \leq 1\}. \end{aligned} \tag{12}$$

それぞれのオイラー標数は $e(\overset{\circ}{\sigma}_d) = (-1)^d$, $e(\sigma_d) = 1$ より次のような “相互律” を考えることができる．

$$e(\overset{\circ}{\sigma}_d) = (-1)^d e(\sigma_d). \tag{13}$$

上式は Stanley の相互律 (3) の類似と見ることができる．この類似は (3) を適当な半代数的集合のオイラー標数を計算することにより説明することができる可能性を示唆している．続いて半代数的半順序集合を導入する．半代数的半順序集合とは簡潔に言うと半代数的集合と半順序集合の構造を併せ持つもののことである．

Definition 1.4. $(P, \leq)$ が半代数的半順序集合とは次をみたすもののことである．

(1) $(P, \leq)$ は半順序集合

(2) 単射 $i : P \to \mathbb{R}^n$ があって，その像 $i(P)$ が半代数的集合で写像 $i \times i : P \times P \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ による像

$$\{(x, y) \in P \times P \mid x \leq y\} \tag{14}$$

がまた, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の半代数的集合である．

P と Q を半代数的半順序集合とする．これらの間の準同型写像の集合は次で定義される．

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}^{\leq}(P,Q) &= \{f : P \to Q \mid f \text{ は半代数的で } x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\},\\ \mathrm{Hom}^{<}(P,Q) &= \{f : P \to Q \mid f \text{ は半代数的で } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Example 1.5. (1) 有限半順序集合 $(P,\leq)$ は半代数的半順序集合で, $e(P) = \#P$.

(2) 開区間 $(0,1)$ は半代数的半順序集合で, $e((0,1)) = -1$.

数えたい対象すべての集合を考えてそれをある種の幾何的な対象と思う．このような空間をモジュライ空間というが, ここでは相互律を定式化するにあたり有限半順序集合から半代数的半順序集合の写像の空間のオイラー標数を計算することを考える．即ち写像の個数を数える代わりにそのモジュライ空間を考える．また, Q を半代数的半順序集合とすると, $e(Q \times (0,1)) = -e(Q)$ より $Q \times (0,1)$ が負半順序集合 “$-Q$” の役割を果たすと期待できる．実際 [3] において次の結果が証明された．

Theorem 1.6 ([3], Theorem 3.1.)**.** P を有限順序集合, Q を半代数的半順序集合とする． このとき

$$\begin{aligned}e(\mathrm{Hom}^{<}(P,Q)) &= (-1)^{\#P} e(\mathrm{Hom}^{\leq}(P, Q \times (0,1))),\\ e(\mathrm{Hom}^{<}(P, Q \times (0,1))) &= (-1)^{\#P} e(\mathrm{Hom}^{\leq}(P,Q)).\end{aligned} \tag{16}$$

我々の目標は流多項式と呼ばれるものに対して上のようなオイラー標数による相互律を定式化することである．

2 主結果

$G = (V,E)$ を向きづけられたグラフとする．ここで V は頂点の集合, E は辺の集合である．さらに G は多重辺とループを持つことを許す．$e \in E$ として $G_{\setminus e}$ により除去, 即ち G から e を取り除いたグラフを表し, $G_{/e}$ で縮約, 即ち G から e を取り除き e を結ぶ両端の頂点を同一視して得られたグラフを表す．$S \subset E$ とし, $G_{\setminus S}$, $G_{/S}$ により S 内のすべての辺をそれぞれ除去, 縮約したグラフを表す．さらに ${}_SG$ により G の reorientation つまり, S 内の辺の向き付けをすべて逆にして得られるグラフを表す．$c(G)$ によりグラフ G の連結成分の個数を表し, $e \in E$ が $c(G_{\setminus e}) = c(G) + 1$ を満たすとき e を橋という．$\xi(G) := |E| - |V| + c(G)$ を cyclotomic 数と呼ぶ．

Definition 2.1. $G = (V,E)$ を向きづけられたグラフ, $\mathscr{A}$ をアーベル群とする．$\mathscr{A}$-flow

とは写像 $f : E \to \mathscr{A}$ のことであって次を満たすもののことである:任意の $v_0 \in V$ に対し

$$\sum_{uv_0 \in E} f_{uv_0} - \sum_{v_0 u \in E} f_{v_0 u} = 0, \tag{17}$$

ここで $uv_0 \in E$ は v_0 に向かうすべての辺で, $v_0 u$ は v_0 から出るすべての辺である.

flow f の台を $\mathrm{supp}(f) = \{e \in E : f_e \neq 0\}$ により定め, $\mathrm{supp}(f) = E$ のとき, f を nowhere-zero という.

Definition 2.2. $G = (V, E)$ を向きづけられたグラフとする. このとき関数,

$$\phi_G(k) = \#\{f \mid E \to \mathbb{Z}_k : f \text{ は nowhere-zero } \mathbb{Z}_k\text{-flow}\}. \tag{18}$$

を G の流多項式という.

Tutte により ϕ_G は次数が $\xi(G)$ の多項式であることが証明された ([7]). さらに次の記号を用いる.

$$\mathscr{F}^0(G, \mathscr{A}) = \{f \mid E \to \mathscr{A} : f \text{ は nowhere-zero } \mathscr{A}\text{-flow}\}, \tag{19}$$

$$\mathscr{F}(G, \mathscr{A}) = \{f \mid E \to \mathscr{A} : f \text{ は } \mathscr{A}\text{-flow}\}. \tag{20}$$

このとき (18) を $\phi_G(k) = \#\mathscr{F}^0(G, \mathbb{Z}_k)$ と表せる. 次に Breuer と Sanyal による結果を述べる. 向きづけられたグラフ G が totally cyclic であるとは, グラフ G の任意の辺が G 内のある directed cycle に属するときのことをいう. $\sigma \subset E$ で, ${}_\sigma G$ が totally cyclic なとき, σ は totally cyclic reorientation という. また

$$\mathcal{FTC}(G, \mathscr{A}) = \{(f, \sigma) : \begin{matrix} f \in \mathscr{F}(G, \mathscr{A}) \\ \sigma \subseteq E \backslash \mathrm{supp(f)} \text{ ; totally cyclic reorientation for } G_{/\mathrm{supp(f)}} \end{matrix}\}. \tag{21}$$

とする. このとき次の組み合わせ論的相互律が成り立つ ([1]).

Theorem 2.3. $G = (V, E)$ を向きづけられたグラフとし, k を正の整数とする. このとき

$$(-1)^{\xi(G)} \phi_G(-k) = \#\mathcal{FTC}(G, \mathbb{Z}_k). \tag{22}$$

この結果をオイラー標数相互律として定式化する. ここで半代数的アーベル群を導入する.

Definition 2.4. $\mathscr{A}$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．$\mathscr{A}$ が次を満たすとき半代数的アーベル群という: $\mathscr{A}$ は半代数的に定義されたアーベル群の構造を持つ．言い換えると, 演算

$$\begin{aligned} &\mu : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}, (x, y) \mapsto xy, \\ &\mu' : \mathscr{A} \to \mathscr{A}, x \mapsto x^{-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

が半代数的である．

例えば $\mathbb{R}$ や $\mathbb{Z}_k$ は半代数的アーベル群である． $\mathscr{A}$ が半代数的アーベル群のとき $\mathscr{F}^0(G, \mathscr{A})$ は半代数的集合である．まず次の結果が成り立つ．

Theorem 2.5. $G = (V, E)$ を向きづけられたグラフとし $\mathscr{A}$ を半代数的アーベル群とする．このとき

$$e(\mathscr{F}^0(G, \mathscr{A})) = \phi_G(e(\mathscr{A})). \tag{24}$$

これにより $\mathscr{A} = \mathbb{Z}_k \times \mathbb{R}$ のとき $e(\mathscr{F}^0(G, \mathscr{A})) = \phi_G(e(\mathscr{A}))$ により "$\#\mathscr{F}^0(G, \mathbb{Z}_{-k})$" の意味づけをすることができる．$\mathscr{A}$ が半代数的集合のとき $\mathcal{FTC}(G, \mathscr{A})$ も半代数的集合である．このとき主結果である流多項式のオイラー標数相互律は次のように定式化される．

Theorem 2.6. $G = (V, E)$ を向きづけられたグラフとし, $\mathscr{A}$ を半代数的アーベル群とする．このとき

$$e(\mathcal{FTC}(G, \mathscr{A})) = (-1)^{\xi(G)} e(\mathscr{F}^0(G, \mathscr{A} \times \mathbb{R})). \tag{25}$$

$$e(\mathcal{FTC}(G, \mathscr{A} \times \mathbb{R})) = (-1)^{\xi(G)} e(\mathscr{F}^0(G, \mathscr{A})). \tag{26}$$

これは Breuer と Sanyal の結果の一般化と見ることもできる．

参考文献

[1] F. Breuer, R. Sanyal, Ehrhart theory, modular flow reciprocity, and the Tutte polynomial. Math. Z. (2012) 270: 1-18.

[2] M. Coste, Real Algebraic Sets. Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry, 1-32, Panor. Synthèses, 24, Soc. Math. France, Paris, (2007).

[3] T. Hasebe, M. Yoshinaga, Euler characteristic reciprocity for chromatic and order polynomials. arXiv:1601.00254 (2016).

[4] S. Schanuel, Negative sets have Euler characteristic and dimension. Category theory (Como, 1990), 379-385, Lecture Notes in Math., 1488, Springer, Berlin, (1991).

[5] R. P. Stanley, A chromatic-like polynimial for ordered set. 1970 Proc. Second Chapel Hill Conf. On Combinatorial Mathmatics and its applications (Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 1970) pp. 421-427

[6] R. P. Stanley, Acyclic orientations of graphs. Discrete Math. 5, 171-178 (1973)

[7] W.T. Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials. Can. J. Math. **6**, 80-91 (1954).

[8] D. J. A. Welsh, Complexity: Knots, Colourings and Counting. London Mathematical Society Lecture Note Series 186, (1993).