一般化されたスピンボソンモデルの自己共役性

寺本 功哲
北海道大学 大学院 理学研究院 数学部門

1 始めに

ここでは, 非相対論的な粒子が場と相互作用する系の Hamiltonian を Hilbert 空間上の作用素として表現したとき，この作用素が自己共役作用素となっているかという事について解説する．量子論の公理の一つとして, 物理量はある Hilbert 空間上の自己共役作用素として表わされるというものがある（この辺の量子力学, 場の量子論の公理について詳しくは [vN, EA, BLOT] 等を参照のこと．）Hamiltonian は物理系を記述する重要な物理量であるので, 適当な空間上で表現された Hamiltonian が自己共役作用素であることを示す必要がある．ここで自己共役性の定義を確認しておく．Hilbert 空間上の (有界とは限らない）線形作用素 T が自己共役であるとは，T とその共役作用素 T^* がそれぞれの定義域 $\mathrm{D}(T)$，$\mathrm{D}(T^*)$ も含めて一致することである．また, 線形作用素 T が対称作用素であるとは, 任意の $\phi \in \mathrm{D}(T)$ に対して $T^*\phi = T\phi$ となることである．有限次元の場合は自己共役性, 対称性はともに行列のエルミート性と等しいが，無限次元の場合，これらの性質には大きな差が有る．自己共役作用素は，定義から明らかに対称作用素であるが逆は成立しない.

非相対論的な粒子と場が相互作用するモデルの話に移ろう．このようなモデルには Nelson, Pauli-Fiertz, 一般化されたスピンボソンモデル, Dirac-Maxwell 型といった重要なモデルがいくつかある．今回は, [AH] により導入された一般化されたスピンボソンモデル (以下，GSB モデル) の自己共役性について考える (他のモデルの詳細について知りたい方は [Hir] 及びそこにあがっている文献等を参照のこと）.

2 準備

まず, いくつかの用語を定義しておく．ここではあまり詳細に立ち入らず定義を確認するだけにとどめておく．詳しくは [Ara00a, Ara00b, RS] 等を見て戴きたい.

定義 2.1. 複素 Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ に対して, ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_b(\mathcal{K})$ を次により定める.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_b(\mathcal{K}) &\coloneqq \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K} \\ &= \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \;\middle|\; \psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{K},\ \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\}\end{aligned}$$

($\otimes_{\mathrm{s}}$ は対称テンソル積である)．$\mathscr{F}_b(\mathcal{K})$ 上の閉作用素として次の性質を持つ生成作用素 $a(f)^*$ 存

在する.

$$\big(a(f)^*\psi\big)^{(0)} = 0,$$
$$\big(a(f)^*\psi\big)^{(n)} = \sqrt{n}S_n\Big(f\otimes\psi^{(n-1)}\Big), \qquad (n\geqslant 1).$$

また, 消滅作用素 $a(f)$ を $a(f) \coloneqq (a(f)^*)^*$ により定める．この時, Segal の場の作用素と呼ばれる自己共役作用素 $\phi(f)$ が

$$\phi(f) \coloneqq \overline{\frac{a(f)+a(f)^*}{\sqrt{2}}}$$

により定まる. ここで, $\overline{A}$ は作用素 A の閉包を表す.

注 2.2. 生成・消滅作用素は次の正準交換関係を満たす.

$$[a(f), a(g)^*] = \langle f\,,\, g\rangle, \quad [a(f), a(g)] = 0, \quad [a(f)^*, a(g)^*] = 0$$

又, Segal の場の作用素は次の Weyl 関係を満たす.

$$e^{i\phi(f)}e^{i\phi(g)} = e^{i\,\mathrm{Im}\langle f\,,\,g\rangle}e^{i\phi(g)}e^{i\phi(f)}, \quad f, g\in\mathcal{K},$$

定義 2.3. $\mathcal{K}$ 上の作用素 S に対して, フォック空間 $\mathscr{F}_b$ 上の第 2 量子化作用素 $d\Gamma(S)$ を以下により定める.

$$\mathrm{d}\Gamma(S) \coloneqq \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^{(n)},$$

但し, $S^{(n)}$ は

$$S^{(0)} \coloneqq 0,$$
$$S^{(n)} \coloneqq \overline{\sum_{j=1}^{n} I\otimes\cdots\otimes I\otimes \underset{(j\text{ 番目 })}{S} \otimes I\otimes\cdots\otimes I\ \Big|_{\hat{\otimes}_{\mathrm{s}}^{n} D(T)}}, \quad (n\geqslant 1)$$

である.

注 2.4. S が自己共役または非負の作用素である時, 第 2 量子化作用素 $d\Gamma(S)$ も自己共役または非負の作用素となる.

3　GSB モデルと自己共役性

$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を複素 Hilbert 空間とする．量子場と相互作用する量子系を表現する Hilbert 空間として次のものを考える.

$$\mathscr{F} \coloneqq \mathcal{H}\otimes\mathscr{F}_b(\mathcal{K}). \tag{1}$$

A を $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素, B_j $(j=1,\ldots,n)$ を $\mathcal{H}$ 上の $A^{1/2}$-有界な自己共役作用素，即ち，各 j に対して定数 $a_j\geqslant 0$, $b_j\geqslant 0$ が存在して

$$\|B_j\psi\| \leqslant a_j\|A\psi\| + b_j\|\psi\|, \quad \psi\in\mathrm{D}(B_j)$$

を満たす．W を $\mathcal{K}$ 上の単射, 非負な自己共役作用素とする．又 $g_j \in \mathrm{D}(W^{-1/2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする．この時, $\mathscr{F}$ 上の作用素として GSB モデルのハミルトニアン $H(\lambda)$ を次により定める．

$$H(\lambda) \coloneqq A \otimes I + I \otimes \mathrm{d}\Gamma(W) + \lambda \sum_{j=1}^{l} B_j \otimes \phi(g_j). \tag{2}$$

GSB モデルのハミルトニアンが上により定義できた．之の作用素が対称作用素である事は直に分るが，自己共役作用素であるかは全く自明ではない．しかし，$A + \mathrm{d}\Gamma(W)$ が自己共役作用素であるので，$\sum B_j \otimes \phi(g_j)$ の部分を摂動項として Kato-Rellich の定理を用いることにより λ が十分小さい時に $H(\lambda)$ が自己共役作用素である事が分る．

次に，$f_k \in \mathrm{D}(W^{-1/2}) \cap \mathrm{D}(W)$ をとり，$H(\lambda)$ に対してより高次の摂動を加えた

$$H(\lambda, \mu) \coloneqq H(\lambda) + \mu \sum_{k=1}^{m} \phi^2(f_k)$$

を考えてみる．この場合は [MS] 等により $\phi^2(f_k)$ が $\mathrm{d}\Gamma(W)$ に対して相対有界であることを用いて，$H(\lambda, 0)$ が下に有界な自己共役作用素であれば，$H(\lambda, \mu)$ も下に有界な自己共役作用素となることが知られている．そこで，更に高次の摂動を加えた

$$H(\lambda, \kappa, n) \coloneqq H(\lambda) + \kappa \sum_{k=1}^{m} \phi^{2n}(f_k)$$

を考えてみる．$n \geqslant 3$ の場合，$\phi^{2n}(f_k)$ は $\mathrm{d}\Gamma(W)$ に対して相対有界とならないので，$H(\lambda, \kappa, n)$ が（本質的に）自己共役作用素となるかは全く非自明である．これに対して，部分的に次の結果が得られる．

定理 3.1. $n = 3, 4, 5$ のとき，$H(\lambda)$ が下に有界な自己共役作用素ならば，$H(\lambda, \kappa, n)$ も下に有界な自己共役作用素となる

一般の n で上記の定理が成立すると思われるが，今のところ n が小さい場合に具体的に計算することでしか分からないために，一般の場合は不明である．

参考文献

[AH] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2. 455–503.

[AK] A. Arai and H. Kawano. Enhanced binding in a general class of quantum field models. Rev. Math. Phys. **15** (2003), no. 4. 387–423.

[Ara00a] 新井朝雄, フォック空間と量子場 上, 共立出版, 2000.

[Ara00b] 新井朝雄, フォック空間と量子場 下, 共立出版, 2000.

[BLOT] N. N. Bogolubov, A. A. Lognov, A. I. Oksak, and I. T. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer, 1990.

[EA] 江沢洋・新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 朝倉書店, 1988.

[Hir] F. Hiroshima. Perturbation problems of embedded eigenvalues in field theories. Sūgaku **57** (2005), no. 1. 70–92.

[MS] T. Miyao and I. Sasaki, Stability of discrete ground state. Hokkaido Math. J. **34** (2005), no. 3. 689–717.

[RS] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1975.

[vN] J. von Neumann, 量子力学の数学的基礎, みすず書房　(井上 健・広重 徹・恒藤敏彦　共訳), 1957.