

可積分理論に於ける“三角圏”構造

弓林 司*(Tsukasa YUMIBAYASHI)
大妻女子大学社会情報学部

概要

本講演では、可積分理論、特に、ソリトン理論の雛形である佐藤理論、其の基礎方程式たる広田三輪方程式を、八面体空間上の場の理論の方程式と見做し、其の“三角圏”構造を議論したい。本講演の内容は主に [1, 2] に依る。

1 導入

可積分と云う言葉は様々な意味で用いられる。本講演では可積分と云う言葉を佐藤理論 [3, 4] の意味での可積分を意味で用いる*¹。

一般に非線形偏微分方程式は任意の初期条件について解く事は出来ない。然し、無限個の対称性*² を持ち、其のお陰でソリトン解と呼ばれる解のシリーズを持つ方程式のクラスが存在する。此のクラスに属する方程式はソリトン方程式と呼ばれている*³。

広田良吾氏はソリトン方程式に対し其のソリトン解のシリーズを与える広田の直接法を編み出した。その過程*⁴ に於いて、ソリトン方程式が Paffian *⁵ が満たす関係式 (Paffian 関係式) である事に気付いた*⁶。例えば 4×4 反对称行列 $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,4}$ に対する Paffian 関係式

$$\text{Pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0 \quad (1)$$

は、函数恒等式、或いは、加法定理として視た場合、広田三輪方程式 [8, 9] と呼ばれる広田理論の基礎方程式である。特に広田三輪方程式は本講演の基礎方程式でもある。

* E-mail: tsukasa.yumibayashi@otsuma.ac.jp

*¹ 詳しくは [5] 等を参照の事。

*² 方程式は、座標、或いは、函数変換の結果、方程式の形が不変に保たれるとき、変換に対し対称性を持つ、と云う。

*³ 詳しくは [6] 等を参照の事。

*⁴ ソリトン方程式 \Rightarrow 広田の双線型方程式 \Rightarrow 行列式解... と云う構造から。

*⁵ 任意の n 次反对称行列 A に対し、其の行列式 $|A|$ は、在る斉次多項式 $\text{Pf}(A)$ の 2 乗として書く事が出来る。このとき、 $\text{Pf}(A)$ を A の Paffian と呼ぶ。特に、 n が奇数の場合、Paffian は恒等的に 0 と成る為、 n が偶数の場合のみが考察の対象と成る。

*⁶ 詳しくは [7] 等を参照の事。

佐藤幹夫氏は広田三輪方程式が佐藤 Grassmannian と呼ばれる \mathbb{C} 上の無限次元 Grassmann 多様体^{*7} $G(\infty/2, \mathbb{C})$ 上の Plücker 関係式^{*8} である事を見出した。此の発見に依り、広田理論に於けるソリトン方程式、特に、Kadomtsev-Petviashvili (KP) 階層と呼ばれるクラスのソリトン方程式は $G(\infty/2, \mathbb{C})$ 上の点を特徴付けるものとして幾何学的に理解された。

更に三輪変換 [9]

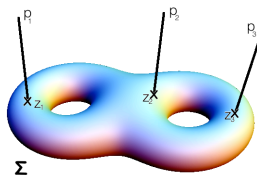
$$t_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \log z_j, \quad t_n = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} p_j z_j^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

に依り、広田三輪方程式の解、即ち、 $G(\infty/2, \mathbb{C})$ 上の点は、Boson 閉弦理論の相関函数と解釈出来る事が知られている^{*9} [10]。

弦/ソリトン対応：

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, \Sigma) := \langle 0 | \prod_{i=1}^4 V(p_i, z_i) | \Sigma \rangle \iff \tau(\mathbf{p}, \mathbf{z}, \Sigma) := \frac{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, \Sigma)}{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, 0)}, \quad \mathbf{p}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^4 \quad (3)$$

- $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, \Sigma)$: 相関函数
- $\tau(\mathbf{p}, \mathbf{z}, \Sigma)$: 広田三輪方程式の解
- $V(p, z) := e^{ipX(z)}$: 弦理論に於ける Tachyon 頂点作用素^{*10}
- $|\Sigma\rangle$: 閉 Riemann 面のデータ (~ 初期条件)^{*11}



本講演では、広田三輪方程式を八面体格子空間上の場の方程式と解釈し、その“三角圏”構造について議論する。

^{*7} n 次元ベクトル空間 V に対し其の k 次元部分空間全体の成す空間は多様体を成す。これを $G(k, V)$ と書き V の Grassmann 多様体と呼ぶ。

^{*8} Grassmann 多様体は射影多様体への埋め込み写像 (Plücker 埋め込み写像) が存在する。Plücker 埋め込み写像が定義する座標は Plücker 関係式と呼ばれる関係式を満たす (逆に Plücker 関係式を解いて Plücker 埋め込み写像を定義する事も出来る)。

^{*9} より正確には、広田三輪方程式に於ける無限個の時間変数 $t_n, n = 0, 1, \dots$ から、弦理論に於ける座標変数 $z_j, p_j, j = 1, 2, \dots$ へ書き換える変換である。

^{*10} 頂点作用素とは、弦理論、特にその共形場理論に依る記述に於いて中心的役割を果たす作用素で、此处では $V(p, z) := e^{ipX(z)}$: を運動量 p を持つ Tachyon Boson 閉弦が、Riemann 面 Σ 上の点 z に於いて相互作用する様子を表現する作用素である。

^{*11} 本講演では、最も単純な広田三輪方程式を考える為、変数の数を 4 としている。

2 概要

本節で本講演の概要を与える。

2.1 広田三輪方程式と八面体空間

広田三輪方程式は $p \in \mathbb{C}^4$ を変数とする方程式

$$a_{12}a_{34}\tau_{12}(p)\tau_{34}(p) - a_{13}a_{24}\tau_{13}(p)\tau_{24}(p) + a_{23}a_{14}\tau_{23}(p)\tau_{14}(p) = 0 \quad (4)$$

である。但し、 $i, j = 1, \dots, 4$ に対し、 $a_{ij} = -a_{ji} = \text{const.} \in \mathbb{C}$ 、 $\tau(p) := \tau(p, z, G)$ 、 $\tau_i(p) := \tau(p + \delta_i)$ 、 $\tau_{ij}(p) := \tau(p + \delta_i + \delta_j) = \tau_{ji}(p)$ 、 $\delta_i := (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}, \delta_{4i})$ とした。

いま

$$\Xi_4 := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Xi_4^{(n)} \subset \mathbb{Z}^4, \quad \Xi_4^{(n)} := \left\{ p \in \mathbb{Z}^4 \mid \sum_{i=1}^4 p_i = n \right\} \subset \mathbb{Z}^3 \quad (5)$$

とし、更に、 $p \in \Xi_4^{(n)}$ とすると、広田三輪方程式が $\Xi_4^{(n+2)}$ の上で定義されている事が判る。又、 $\Xi_4^{(n)}$ は、座標変換 $p \rightarrow (k, n) \in \mathbb{Z}^3$ ^{*12} に依り、 \mathbb{Z}^3 を八面体で埋め尽くしたもの（八面体空間）と理解される。特に、1つの $p \in \Xi_4^{(n+2)}$ を固定した時、広田三輪方程式の6つの τ 関数 $\tau_{ij}(p)$ は、1つの八面体の頂点の上に定義されていることに注意する。

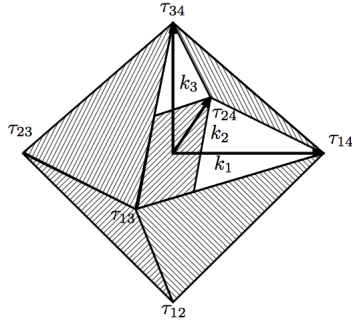


図1 八面体

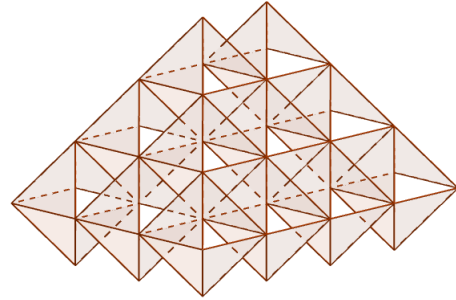


図2 八面体空間 $\Xi_4^{(n+2)}$

故に広田三輪方程式は八面体空間上で定義された“場の方程式”と解釈出来る。

*12

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

2.2 八面体空間上の外差分形式

広田三輪方程式は2階差分方程式であった。八面体空間上に微分幾何学に於ける外微分形式成らぬ外差分形式^{*13}を定義する事で、広田三輪方程式の八面体空間上の場の運動方程式として理解を深める事が出来る。

2.2.1 Ξ_4 上の外差分形式

先ず Ξ_4 上の関数に対する外差分 d_D を以下で定義する：

$$d_D \omega := \sum_{j=1}^4 \omega_j \wedge dp_j, \quad \forall \omega \in \Omega_4[\Xi_4] := \{ \omega \mid \omega : \Xi_4 \rightarrow \mathbb{C} \} \quad (7)$$

此処で、 $p \in \Xi_4^{(n)}$ ならば、 $\omega(p)$ は $\Omega_4[\Xi_4^{(n)}] := \{ \omega \mid \omega : \Xi_4^{(n)} \rightarrow \mathbb{C} \}$ 上の関数であり、又、 $\omega_j(p), j = 1, \dots, 4$ は $\Omega_4[\Xi_4^{(n+1)}]$ 上の関数である^{*14}。従って外差分に依り関数が定義されている点がズれてしまう事に注意が必要である。

其処で m 次外差分形式の成すベクトル空間 $\bigwedge^{(m)} \Omega_4[\Xi_4^{(n)}]$ を

$$\bigwedge^{(m)} \Omega_4[\Xi_4^{(n)}] := \left\{ \sum_{i_1 \dots i_m} \omega_{i_1 \dots i_m} dp_{i_1} \wedge \dots \wedge dp_{i_m} \mid \omega_{i_1 \dots i_m} : \Xi_4^{(n+m)} \rightarrow \mathbb{C} \right\} \quad (8)$$

と定義し、外差分代数 $\bigwedge \Omega_4[\Xi_4^{(n)}]$ を

$$\bigwedge \Omega_4[\Xi_4^{(n)}] := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge^{(m)} \Omega_4[\Xi_4^{(n)}] \quad (9)$$

と定義すると、外差分 d_D は、 $\bigwedge \Omega_4[\Xi_4^{(n)}]$ 上に

$$d_D : \bigwedge^{(m)} \Omega_4[\Xi_4^{(n)}] \rightarrow \bigwedge^{(m+1)} \Omega_4[\Xi_4^{(n)}] \quad (10)$$

と作用する事が判る。

^{*13} 格子空間上では関数の微分は意味を持たない。

^{*14} 正確には、 $\omega \in \Omega_4[\Xi_4^{(n)}]$ ならば、 $\text{Dom } \omega \subset \Xi_4^{(n)}$ であり、 $\text{Dom } \omega_j \subset \Xi_4^{(n+1)}, j = 1, \dots, 4$ である、と云うべきであるが、簡単の為此の様に表現した。

2.2.2 $\Xi_3^{(t,n+2)}$ 上の外差分形式

次に、平面波を考察するが如く、八面体空間を、運動方向と、その直交補空間へ分解する。進行方向を $-p_4$ 方向とすると直交補空間 $\Xi_3^{(t,n+2)}$ は

$$\Xi_4^{(n+2)} = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \Xi_3^{(t,n+2)}, \quad \Xi_3^{(t,n+2)} := \left\{ (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^3 \left| \sum_{a=1}^3 p_a = t \in \mathbb{Z}, \mathbf{p} \in \Xi_4^{(n+2)} \right. \right\} \quad (11)$$

と表す事が出来る。此処で $n+2$ ($= \sum_{i=1}^4 p_i$) $= t + p_4$ は固定している事に注意する^{*15}。

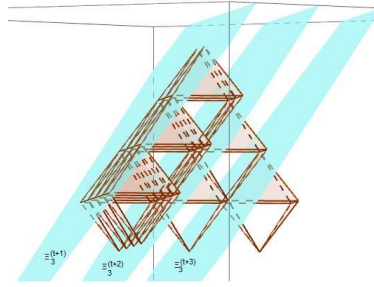


図 3 $\Xi_3^{(t,n+2)}$

進行方向への発展を記述するべく t に関する外差分 d_T を d_D と同様に定義する：

$$d_T \omega = \sum_{a=1}^3 \omega_a \wedge dp_a, \quad \forall \omega \in \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n+2)} \right] := \left\{ \omega \mid \omega : \Xi_3^{(t,n+2)} \rightarrow \mathbb{C} \right\} \quad (12)$$

又、外差分代数 $\bigwedge \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n+2)} \right]$ も、 d_D と同様に外差分前後で函数が異なる面上で定義されている事に注意し

$$\bigwedge \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n+2)} \right] := \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \bigwedge^{(s)} \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n+2)} \right] \quad (13)$$

$$\bigwedge^{(s)} \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n+2)} \right] := \left\{ \sum_{a_1 \dots a_s} \omega_{a_1 \dots a_s} dp_{a_1} \wedge \dots \wedge dp_{a_s} \mid \omega_{a_1 \dots a_s} : \Xi_4^{(t+s,n+2)} \rightarrow \mathbb{C} \right\} \quad (14)$$

と定義すると、 t に関する外差分 d_T は、 $\Omega_3 \left[\Xi_3^{(s,n+2)} \right]$ 上に

$$d_T : \bigwedge^{(s)} \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n+2)} \right] \rightarrow \bigwedge^{(s+1)} \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n+2)} \right] \quad (15)$$

と作用する事が判る。

^{*15} 広田三輪方程式の変数 \mathbf{p} を $\Xi_4^{(n)}$ 上に採ったとき広田三輪方程式が $\Xi_4^{(n+2)}$ 上で定義されていた事を思い出す。特に t の増減で p_4 が減増する。

2.3 接続条件

最後に八面体 $\mathcal{O}[0]$ と $\mathcal{O}[1]$ が上手く接続する為には条件

$$\tau_{14}[2] = \tau_{31}[2], \quad \tau_{24}[2] = \tau_{23}[2] \quad (16)$$

が必要と成る。即ち

$$\bigwedge \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t+1,n)} \right] \sim \bigwedge \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n)} \right] \quad (17)$$

を意味する。以上に依り八面体空間上に上手く差分形式を定義する事が出来た。

2.4 八面体空間上の外差分形式と広田三輪方程式

さて愈々八面体空間上の外差分形式を用いて広田三輪方程式を表現しよう。

先ず、2つの4次元の2差分形式

$$F := \sum_{i,j=1}^4 F_{ij} dp_i \wedge dp_j, \quad F_{ij} := a_{ij} \tau_{ij}, \quad F \in \bigwedge \Omega_4 \left[\Xi_4^{(n)} \right] \quad (18)$$

$$\tilde{F} := \sum_{i,j=1}^4 \tilde{F}_{ij} dp_i \wedge dp_j, \quad \tilde{F}_{ij} := {}^* a_{ij} \tau_{ij}, \quad \tilde{F} \in \bigwedge \Omega_4 \left[\Xi_4^{(n)} \right] \quad (19)$$

を定義する。此处で、 ${}^* a_{ij} = \sum_{kl} \epsilon_{ijkl} a_{kl}$ 、及び、 ϵ_{ijkl} は Levi-Civita の完全反対称テンソルとした。このとき、広田三輪方程式は、

$$\det F_{ij} = 0, \quad \det \tilde{F}_{ij} = 0 \quad (20)$$

と書く事が出来る。

次に、 t 方向への発展を見る為、 F を t に関する外差分 d_T を用いて書くと

$$F = \sum_{i,j=1}^4 F_{ij} dp_i \wedge dp_j = d_T \left(F_4 dp_4 + \sum_{b=1}^3 F_b dp_b \right) \quad (21)$$

と分解する事が出来る。従って、 F_{ij} を

$$d_T F_4 = \sum_{a=1}^3 F_{a4} dp_a \in \bigwedge \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n)} \right] \quad (22)$$

$$d_T \sum_{b=1}^3 F_b dp_b = \sum_{b,c=1}^3 F_{bc} dp_b \wedge dp_c \in \bigwedge \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t,n)} \right] \quad (23)$$

と、 t に関する外差分形式として、其れ其れ、1 形式、2 形式、詰り、異なる面上で定義された函数として表現する事が出来る。

いま、 $\tilde{S}_j[t+1]$ と $S_j[t+2]$ を八面体の向かい合う三角形、 $\tau(\mathbf{p})$ を $\Xi_3^{(t,n)}$ 上の函数とすると、 $\tilde{S}_4[t+1]$ は $\Xi_3^{(t+1,n)}$ 上、 $S_4[t+2]$ は $\Xi_3^{(t+2,n)}$ 上に在る。このとき、始めに述べた通り、広田三輪方程式に依り、八面体 $\mathcal{O}[t] = (\tilde{S}_4[t+1], S_4[t+2])$ 上には

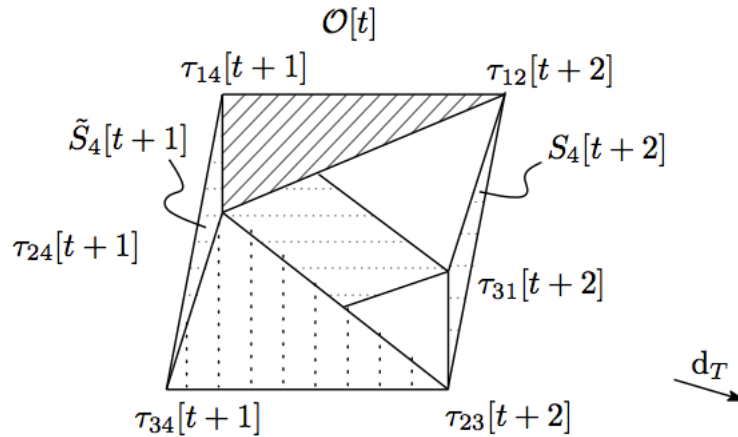
$$\begin{aligned}\tilde{S}_4[t+1] &\Rightarrow (\tau_{14}[t+1], \tau_{24}[t+1], \tau_{34}[t+1]) \\ S_4[t+2] &\Rightarrow (\tau_{23}[t+2], \tau_{31}[t+2], \tau_{12}[t+2])\end{aligned}$$

と、解が定義されている^{*16}。

結局、広田三輪方程式は、八面体 \mathcal{O} を初期条件とし

$$\mathcal{O} \xrightarrow{d_T} \mathcal{O}[1] \xrightarrow{d_T} \mathcal{O}[2] \xrightarrow{d_T} \mathcal{O}[3] \xrightarrow{d_T} \dots \quad (24)$$

という平面波を与える事が判る^{*17}。此処で \mathcal{O} は $t=0$ に於ける八面体とした。



*16 簡単の為 $\Omega \in \omega_3 [\Xi_3^{(t,n+2)}]$ であることを $\omega[t]$ と表した。

*17 厳密には

$$\Omega_3 [\Xi_3^{(0,n+2)}] \xrightarrow{d_T} \Omega_3 [\Xi_3^{(1,n+2)}] \xrightarrow{d_T} \Omega_3 [\Xi_3^{(2,n+2)}] \xrightarrow{d_T} \Omega_3 [\Xi_3^{(3,n+2)}] \xrightarrow{d_T} \dots \quad (25)$$

である。

2.5 八面体上の流れ

以上により広田三輪方程式が八面体空間上の進行波を与える事が判った。然し各点が具体的にどう時間発展するかは不定である。此処ではこれを八面体公理^{*18} に適合する形で定義する。

2点 p, p' を繋ぐ経路は無数に存在する。然し全ての経路は各八面体の1つの辺を移動する経路の組み合わせから成る。従って各八面体の1つの辺を移動する方向を上手く定めれば良い。更に図 2.4 を見れば判る様に、 τ_{ij} の隣は τ_{ik} の形をしているから、 i, j, k に対し、 $\tau_{ij} \rightarrow \tau_{ik}$ であるのか $\tau_{ik} \rightarrow \tau_{ij}$ であるのかを上手く定めれば良いという事に成る^{*19}。

先ず以下の様に巡回的に順序関係を定める。

$$1 < 2 < 3 < 4 < 1 < 2 < 3. \quad (26)$$

次に

$$D(ij, ik)_{p,p} : \tau_{ij}(p) \longrightarrow \tau_{ik}(p), \quad \text{iff } k < i < j. \quad (27)$$

と方向を定義する。此処で $p \in \Xi_4^{(n)}$ は八面体の中心とした。此の方向付けに依り、八面体上に流れが定義され、全ての八面体の間に経路を定義する事が出来る^{*20}。

3 結論

以上依り可積分理論に対し以下の様な対応の下“三角圏”構造が定義される事が判る：

$$\begin{array}{ll} \text{対象} & \longleftrightarrow \tau_{ij} \in \bigcup_{s=1,2} \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \Lambda^{(s)} \Omega_3 \left[\Xi_3^{(t, n+2)} \right], \\ \text{射} & \longleftrightarrow \left\{ D_r(ij, kl)_{p,p'}, \forall r \in \{ \text{可能な経路} \}, p, p' \in \Xi_4^{(n+2)} \right\}, \\ \text{シフト関手} & \longleftrightarrow d_T : \mathcal{O}[t] \rightarrow \mathcal{O}[t+1], \\ \text{八面体公理} & \longleftrightarrow \left\{ D(ij, ik)_{p,p}, \text{ iff } k < i < j, p \in \Xi_4^{(n+2)} \right\} \end{array} \quad (28)$$

^{*18} 三角圏の公理の1つ。詳しくは [11] 等を参照の事。

^{*19} i, j, k は全て異なる事に注意。

^{*20} 但し経路自体は一意的でない事に注意する。

参考文献

- [1] S. Saito, T. Yumibayashi, Y. Wakimoto, “Singularity Confinement and Projective Resolution of Triangulated Category”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* (2014) 023A08.
- [2] T. Yumibayashi, “Discrete Integrable System and Invariant Variety of Periodic Points”, Doctoral Thesis at Tokyo Metropolitan University (2015).
- [3] M. Sato and Y. Sato, *Research Institute of Mathematical Studies Report* **388**, 183 (1980); *ibid* **414**, 181 (19981).
- [4] 佐藤幹夫 (述), 野海正俊 (記), “ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体”, *上智大学数学講究録* no.18 (1984).
- [5] 高崎金久, “可積分系の世界”, 共立出版 (2001).
- [6] 三輪哲二, 神保道夫, 伊達悦朗, “ソリトンの数理”, 岩波書店 (1998).
- [7] 広田良吾, “直接法によるソリトンの数理”, 岩波書店 (1992).
- [8] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 3787 (1981).
- [9] T. Miwa, *Proc. Japan Acad.* **58A** 9 (1982).
- [10] S. Saito, *Phys. Rev. Lett.* **59** 1798 (1987).
- [11] A. Neeman, “Triangulated categories”, volume 148 of *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2001).