非線形固有値問題に現れる微分方程式の解のBorel総和可能性について

紫垣 孝洋 (Takahiro SHIGAKI)
神戸大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期課程1年

1　導入

Bender, Fring, Komijani は論文 [BFK] において，ある 1 階非線形方程式の解で特別な漸近挙動をもつものを考え，その初期値について考察した．この問題は「非線形固有値問題」(nonlinear eigenvalue problem) と命名されたが，私は彼らの結果を完全 WKB 解析の手法で証明することに取り組んでいる．そのためにまずは方程式に微小パラメータを導入し，パラメータについての形式べき級数解を構成した．次に形式べき級数解について無限遠の近傍で Borel 総和可能であることを示した．このことは無限遠点の近傍で形式べき級数解に解析的な意味付けをできたことを意味している．2 章では論文 [BFK] の結果をまとめている．3 章ではその結果を完全 WKB 解析で示すための方針と準備を述べている．主定理は Borel 総和可能性についての主張であるため，Borel 総和法について 4 章で説明している．最後の 5 章が主定理である．

2　非線形固有値問題とは

論文 [BFK] には，方程式

$$y'(x) = \cos[\pi x y(x)], \quad y(0) = a. \tag{2.1}$$

についての研究結果が記されている．この方程式は

$$y(x) \sim \frac{m + 1/2}{x} \quad (x \to \infty)$$

(ただし $m = 0, 1, 2, \ldots$) という漸近挙動をもつ．図 1 は (2.1) において $a = 0.2k$ $(1 \leq k \leq 21)$ を初期値として与えた解の数値計算結果である．図 2 のグラフは図 1 のグラフに $y = (m + 1/2)/x$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, 10)$ の曲線を点線で描いて重ねたものである．図 2 から，初期値を与えると漸近する曲線は m が偶数のときになっていることが読み取れる．一方 m が奇数の場合の漸近挙動をもつ解が数値計算で描いたグラフには出てこない．実は m が偶数のときの漸近挙動をもつ解は無数にあるのに対し，奇数のときの漸近挙動をもつ解は m に対して一つしかない．そこで $m = 2n - 1 (n = 1, 2, \ldots)$ のときに対応する解 (論文ではこの解のことを n-th separatrix と定義していた) の初期値 $y(0)$ を a_n とおく．論文 [BFK] の主結果の 1 つは $n \to \infty$ のとき，a_n が漸近的に

$$a_n \sim 2^{5/6}\sqrt{n} \quad (n \to \infty)$$

と振る舞うというものである．[BFK] では a_n を「固有値」と呼び，この非線形方程式に対して a_n を考える問題を「非線形の固有値問題」(Nonlinear eigenvalue problems) と呼んだ．

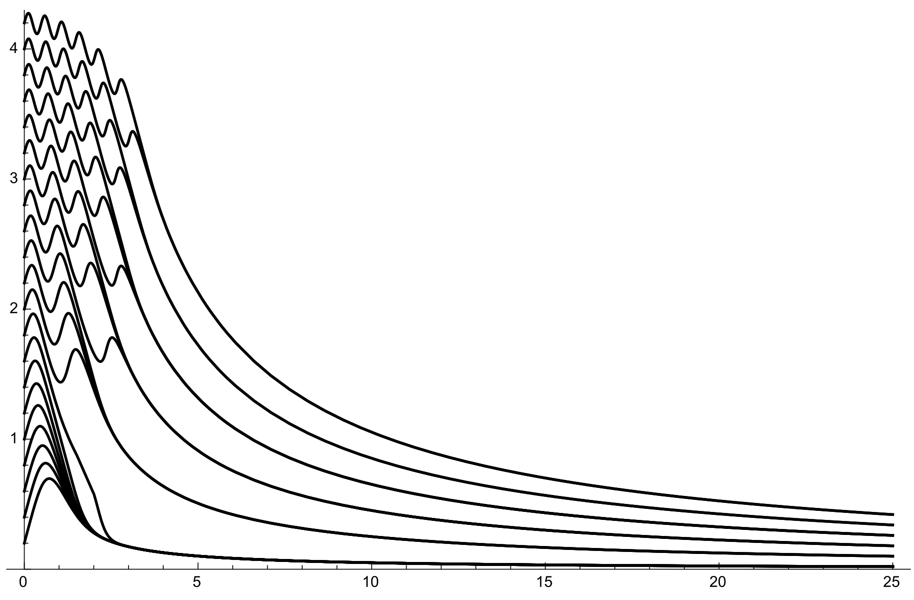

図 1: 方程式 (2.1) のグラフ．初期値は $a = 0.2k$ $(1 \leq k \leq 21)$ として数値計算を行った．

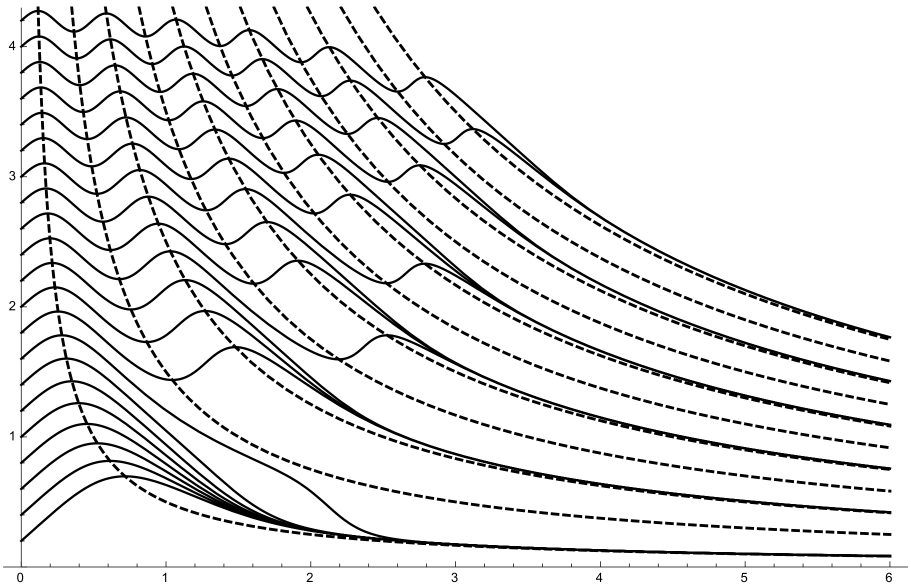

図 2: 図 1 のグラフに，$y = (m + 1/2)/x$ $(m = 0, 1, 2, \dots, 10)$ を点線で描いて重ねたもの.

3　完全 WKB 解析を用いるための準備

方程式 (2.1) について $y(x) \sim (2n - 1/2)/x(x \to +\infty)$ となる解に対し，その初期値 $y(0) =: a_n$ が $n \to \infty$ でどうふるまうかということが [BFK] で考えられていた．小さいパラメータ $\varepsilon = 1/\{(2n - 1/2)\pi\}$ を導入し，$x = t/\sqrt{\varepsilon\pi}$ と変数変換することで，以下の命題を得る．

命題 3.1 方程式 (2.1) には次の形の形式解が存在する．

$$y = \frac{1}{t\sqrt{\varepsilon\pi}}(1 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t)). \tag{3.1}$$

ただし，$u_0(t)$ は $\sin u_0(t) = -1/t^2$ を満たす関数である．$u_1(t), u_2(t), \dots$ は $u_0(t)$ を決めると一意に決まる．

この形式解 (3.1) に Borel 総和法を用いて解析的な意味付けを与えたいので，$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t)$ の Borel 総和可能性を以下では考えていく．ここで $u_0(t) = \sin^{-1}(1/t^2) \to -N\pi$ $(t \to +\infty)$ なので，$u_0(t)$ の branch は整数 N を選ぶことで決まることに注意する．特に $N = 0$ のときに $y \sim 1/t\sqrt{\varepsilon\pi} = (2n - (1/2))/x$ $(x \to \infty)$ を満たす．

Bender, Fring, Komijani の結果を完全 WKB 解析を用いて示すために，次の 3 つのステップを考えている．

(i) 小さい $\varepsilon > 0$ についてのべき級数解 $u(t,\varepsilon)$ を構成し，Borel 総和法を用いて無限遠の近傍で解析的意味を与える．

(ii) 原点への解析接続がどうなるかを調べる．

(iii) 解の原点での挙動を調べる．

今回述べる主定理は (i) についての結果である．

4 Borel 総和法

形式べき級数 $u(t,\varepsilon)$ に対して，ε に関する Borel 総和法によって解析的な意味を与えることができ，その Borel 和は解析関数解を与える． この章では準備として Borel 総和法の定義と性質を述べる．([KT] の 1 章を参照せよ．)

定義 4.1 (Borel 変換) 小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ の無限級数

$$f(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varepsilon^j \tag{4.1}$$

に対し，その **Borel 変換** $f_B(y)$ を

$$f_B(y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{(j-1)!} y^{j-1}$$

で定義する．これが $y = 0$ の近傍で収束するとき，f は **Borel 変換可能**であるという (これは $|f_{j+1}| < AC^j j!$ $(j = 0, 1, \ldots)$ なる正定数 A, C が存在することと同値)．

定義 4.2 (Borel 総和可能) 級数 (4.1) が以下の 3 つの条件を満たすとき，f は **Borel 総和可能**であるという．

(i) 級数 f は Borel 変換可能である．

(ii) ある $\delta > 0$ が存在し，Borel 変換 $f_B(y)$ は

$$\Sigma(\delta) := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(z, \mathbb{R}_+) < \delta\}$$

へ解析接続可能である．

(iii) $0 < \delta' < \delta$ なる任意の δ' に対して，正定数 B_1, B_2 が存在し，任意の $y \in \Sigma(\delta')$ に対し $|f_B(y)| < B_1 e^{B_2|y|}$ が成り立つ．

このとき，f の Borel 和 $F(\varepsilon)$ を $f_B(y)$ の Laplace 積分

$$F(\varepsilon) := \int_0^\infty e^{-y/\varepsilon} f_B(y) dy$$

で定義する．ただし，積分路は正の実軸とする．

級数が $u = \sum_{j=0}^\infty u_j \varepsilon^j$ のように定数項を含んでいる場合は，定数項を引いて $v := u - u_0$ を考え，v の Borel 変換を考えればよい．さらに Borel 和は $u_0 + (v$ の Borel 和$)$ と定義すればよい．

また，Borel 変換は級数の各項に逆 Laplace 変換を施したものである．実際 $f_j y^{j-1}/(j-1)!$ に対して，

$$\int_0^\infty e^{-y/\varepsilon} \frac{f_j}{(j-1)!} y^{j-1} dy = f_j \varepsilon^j$$

だからである．級数 f が収束していれば，$f_B(y)$ は整関数であり，定義 4.2(iii) の不等式が全平面で成り立つ．したがって項別積分することができ，f の Borel 和はもとの f と一致することがわかる $(F = f)$．この性質は「総和法の正則性」とよばれている．

一般には次が成立する．

定理 4.3 級数 (4.1) が Borel 総和可能であるとき，級数 f はその Borel 和 $F(\varepsilon)$ の漸近展開となる．つまり任意の正の整数 N に対し，ある定数 L_N が存在し，次を満たす．

$$\left| F(\varepsilon) - \sum_{j=1}^N f_j \varepsilon^j \right| < L_N \varepsilon^{N+1} \ (\varepsilon > 0 : \mathrm{small}).$$

これの証明は [Ez] の定理 4.4 を参照せよ．

次の章では $u(t, \varepsilon)$ の Borel 総和可能性についての定理を述べる．ここで，$u(t, \varepsilon)$ は ε のべき級数として t をパラメーターとして含んでいるため，Borel 総和可能であるかどうかは t に依存して決まることに注意する．

5　主定理

べき級数 $u(t,\varepsilon)$ は次の微分方程式を満たす．

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}u(t,\varepsilon)=t\sin u(t,\varepsilon)+\frac{1}{t}+\varepsilon\frac{u(t,\varepsilon)}{t}$$

ここで $\varepsilon w(t,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)-u_0(t)-\varepsilon u_1(t)$ とおくと，$w(t,\varepsilon)$ の満たす方程式の線形項は次のようになる．

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}w(t,\varepsilon)=\sqrt{\frac{t^4-1}{t^2}}(w(t,\varepsilon)-\varepsilon u_2(t)).$$

係数に出てくる $(t^4-1)/t^2$ の零点 $t=\pm1,\pm i$ を**変わり点**と定義し，**Stokes 曲線**を $\Im\int_a^t\sqrt{(s^4-1)/s^2}ds=0$ (a は変わり点，つまり $a=\pm1,\pm i$) で定義する．さらに Stokes 曲線で囲まれている領域を **Stokes 領域**と呼ぶことにする．Stokes 曲線は次の図 3 のようになり，Stokes 領域は I,II,III,IV,V の 5 つとなる．

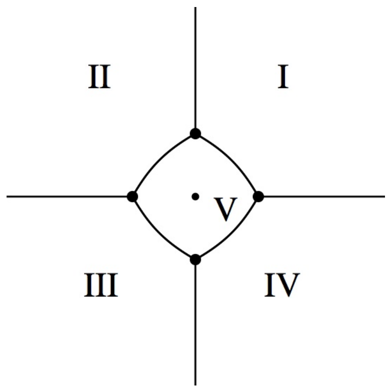

図 3: Stokes 曲線と Stokes 領域の図

$u(t,\varepsilon)$ の Borel 総和可能性について以下が成り立つ．

定理 5.1 (主定理) Stokes 曲線 $\Im\int_a^t\sqrt{(s^4-1)/s^2}ds=0$ で定まる図 3 の Stokes 領域 I,II,III,IV において，方程式 (2.1) の形式解 (3.1) の主な項である $u(t,\varepsilon)$ は Borel 総和可能である．

講演ではこの主定理の説明と，時間が許せば最近の研究結果について話をしたい．

参考文献

[BFK] C. M. Bender, A. Fring, and J. Komijani: Nonlinear eigenvalue problems, J. Phys. A, **47**(2014), 235204.

[KT] 河合隆裕, 竹井義次: 『特異摂動の代数解析学』, 岩波書店 (1998).

[Ez] 江沢洋: 『漸近解析入門』, 岩波書店 (2013).