# PAINLEVÉ EQUATIONS OF TYPE VI AND $q$-$D_5^{(1)}$ ARISING FROM PADÉ APPROXIMATION

長尾秀人 HIDEHITO NAGAO (明石工業高等専門学校 一般科目助教)

Abstract. Padé 近似と呼ばれる有理関数による近似を応用して，2 階線形微分方程式を構成すると，超幾何微分方程式になることが古くから知られている．さらに，その非線形化として，Painlevé 方程式と呼ばれる 2 階非線形微分方程式を構成できることが知られている．最近になって，その q 差分的離散化として，affine Weyl 群対称性を持つ $q$ 差分的離散 Painlevé 方程式が構成されている．本講演では，Painlevé 方程式 VI 型及び，その $q$ 差分化である $q$-Painlevé 方程式 $D_5^{(1)}$ 型ついて報告する．

## 1. Introduction

### 1.1. The background of (differential) Painlevé equations.

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて, Paul Pailvevé によって発見され,「動く特異点は極に限る」という Pailvevé 性を備えた 2 階非線形常微分方程式として研究されてきた.「動く特異点」とは, 微分方程式の初期値問題の解に現れる特異点の位置が初期値に依存する特異点をいう. Pailvevé 程式は $P_{\mathrm{I}}$ から $P_{\mathrm{VI}}$ までの 6 種類に分類される.

$$
\begin{aligned}
&P_{\mathrm{I}} : \lambda'' = 6\lambda^2 + t,\\
&P_{\mathrm{II}} : \lambda'' = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha,\\
&P_{\mathrm{III}} : \lambda'' = \frac{1}{\lambda}(\lambda')^2 - \frac{1}{t}\lambda' + \frac{1}{t}(\alpha\lambda^2 + \beta) + \gamma\lambda^3 + \frac{\delta}{\lambda},\\
&P_{\mathrm{IV}} : \lambda'' = \frac{1}{2\lambda}(\lambda')^2 + \frac{3}{2}\lambda^3 + 4t\lambda^2 + 2(t^2 - \alpha)\lambda + \frac{\beta}{\lambda},\\
&P_{\mathrm{V}} : \lambda'' = \Big(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1}\Big)(\lambda')^2 - \frac{1}{t}\lambda' + \frac{(\lambda-1)^2}{t^2}\Big(\alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\Big) + \frac{\gamma}{t}\lambda + \delta\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1},\\
&P_{\mathrm{VI}} : \lambda'' = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\Big)(\lambda')^2 - \Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\Big)\lambda'\\
&\qquad\qquad + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\Big(\alpha + \beta\frac{t}{\lambda^2} + \gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\Big).
\end{aligned}
$$

ここで, $\alpha, \beta, \cdots$ は複素数 parameter である.

これら 6 種類の Pailvevé 方程式に関する退化図式を次のようになる.

$$
\begin{array}{ccccccc}
P_{\mathrm{VI}} & \rightarrow & P_{\mathrm{V}} & \rightarrow & P_{\mathrm{III}} & & & \\
\text{Gauss} & & \text{Kummer} & & \text{Bessel} & & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \\
 & & & & P_{\mathrm{IV}} & \rightarrow & P_{\mathrm{II}} & \rightarrow & P_{\mathrm{I}} \; .\\
 & & & & \text{Hermite-Weber} & & \text{Airy} & & \text{None}
\end{array}
$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 33D15, 34M55, 39A13, 41A21.
*Key words and phrases.* Padé method, Padé interpolation, $q$-Painlevé equation.

これら 6 種類の Pailvevé 方程式は一般的に初等関数の範囲では解くことができないが, parameter が特殊な値をとる時に超幾何型の特殊関数 (Gauss, Kummer, Bessel, Hermite-Weber, Airy) で表される解が存在する[1]．他にも代数関数，有理関数で表される解などを持つ．

Painlevé 方程式は，Hamilton 力学系として表現でき，線形作用素 (Lax 対[2]) の両立条件として表現でき， Bäcklund 変換[3]として affine Weyl 群対称性を持つなど，可積分系としての多くの良い性質を持つ．

### 1.2. **The background of discrete Painlevé equations.**

離散 Painlevé 方程式は，微分 Painlevé 方程式の良い性質を保存したまま離散化したものである．例えば，離散 Painlevé 性 (特異点閉じ込め)[4]，特殊解，Bäcklund 変換，Lax 対など．それらは affine Weyl 群対称性に関連した有理曲面に基づいて分類 [11] され，差分タイプは楕円差分 ($e$-), 乗法差分 ($q$-)，加法差分 ($d$-) の 3 種類がある. この最上位に位置する楕円 Painlevé 方程式は，全ての 2 階 Painlevé 方程式を統括するものである．これは，$E_8^{(1)}$ 型の affine Weyl 群の対称性を持ち，他の全ての場合はその退化極限となる．$q$ 差分 Painlevé 方程式は $E_8^{(1)}$ 型から $\mathcal{D}_6$ 型まで分類される.

(1.1)

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{ell.}(e\text{-}) & E_8^{(1)} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \nearrow & \mathbb{Z} & \searrow \\
\text{mul.}(q\text{-}) & E_8^{(1)} \to E_7^{(1)} \to E_6^{(1)} \to & D_5^{(1)} \to & A_4^{(1)} \to & (A_2+A_1)^{(1)} \to & (A_1+A_1')^{(1)} \to & & A_1^{(1)} & & \mathcal{D}_6 \\
 & & (q\text{-}P_{\mathrm{VI}}) & (q\text{-}P_{\mathrm{V}}) & (q\text{-}P_{\mathrm{IV}}, q\text{-}P_{\mathrm{III}}) & (q\text{-}P_{\mathrm{II}}) & & (q\text{-}P_{\mathrm{I}}) & & \\
\text{add.}(d\text{-}) & E_8^{(1)} \to E_7^{(1)} \to E_6^{(1)} \to & D_4^{(1)} \to & A_3^{(1)} \to & (A_1+A_1')^{(1)} \to & A_1^{(1)} \to & \mathbb{Z}_2 & & & \\
 & & (P_{\mathrm{VI}}) & (P_{\mathrm{V}}) & (P_{\mathrm{III}}) & & & & & \\
 & & & \searrow & \searrow & & \downarrow & & & \\
 & & & & A_2^{(1)} \to & A_1^{(1)} \to & 1 & & & \\
 & & & & (P_{\mathrm{IV}}) & (P_{\mathrm{II}}) & (P_{\mathrm{I}}) & & &
\end{array}
$$

### 1.3. **The background of Padé method.**

Padé 近似を応用して Painlevé/Garnier[5]方程式を研究する簡単な方法 [13] がある．その方法では，適当な Padé 近似問題を設定すれば，Painlevé/Garnier 方程式に対する時間発展非線形方程式，scalar 型 Lax 対[6]，超幾何型特殊解の行列式表示の 3 つが同時に得られる．この方法は Padé 法と呼ばれている．Padé 法はこれまで様々な微分/離散 Painlevé 方程式 [3] に

---

[1]Painlevé 方程式は，超幾何型特殊関数の満たす方程式の非線形拡張とみなすことができる．

[2]Lax 対とは，可積分系の理論における用語であり，2 種類の線形方程式 (線形方程式とその変形方程式) の両立条件として，時間発展型非線形方程式が得られる組である．

[3]微分/差分方程式に対して，従属変数の変換であって方程式の形を変えない変換を，その方程式の Bäcklund 変換と呼ぶ．

[4]ある差分方程式が次の性質 (1)(2) を持つとき,「特異点閉じ込めテストに通る」と言う．(1) 初期値に依存して特異性が現れたとき，その特異性は有限ステップで打ち消しあって無くなってしまう．(2) 特異点を通過しても初期値の情報は失われない．

[5]Garnier 方程式は Painlevé 方程式の多変数版である．

[6]Lax 対のタイプには，連立 1 階線形微分/差分方程式 (行列型) と単独高階線形微分/差分方程式 (scalar 型) の 2 つあり，お互いに書き換えることができる．

適用されている [1, 5, 6, 7, 9, 15]．最近，$q$ 差分 Garnier 系にも Padé 法が適用 [8] されている．本報告は [6] に基づく．

## 2. Padé approximation method to case $P_{\mathrm{VI}}$

本章では，Padé 近似を応用して，Painlevé 方程式 VI 型に対する時間発展非線形方程式，scalar 型 Lax 対，超幾何型特殊解の行列式表示を導く．

**2.1. Padé approximation problem.**
parameter $q, a, b, t \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき，適当な関数

$$Y(x) := (1-x)^a\Big(1-\frac{x}{t}\Big)^b . \tag{2.1}$$

を与え，Padé 近似問題

$$Y(x) \equiv \frac{P_m(x,t)}{Q_n(x,t)} \pmod{x^{m+n+1}}. \tag{2.2}$$

を考える．ここで，関数 $P_m$，$Q_n$ は，それぞれ $x$ について $m$，$n$ 次多項式とし定数項を 1 とする．

**2.2. Linear differential equation and Deformation differential equation.**
未知関数 $y(x,t)$ に対して，$y = P_m, YQ_n$ を解に持つ，3 項間 $y, y', y''$ に関する線形微分方程式を $L_1 = 0$ とし，3 項間 $y, y', \dot{y}$ に関する変形微分方程式を $L_2 = 0$ とする．ここで，$' = d/dx$，$\dot{} = d/dt$ とする．このとき，

**Lemma 1.** 線形微分方程式と変形微分方程式

$$L_1 = y'' + A_1' + A_2 y = 0, \quad L_2 = \dot{y} + B_1 y' + B_2 y = 0. \tag{2.3}$$

の係数 $A_i, B_i$ は，

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-(m+n)}{x} + \frac{1-a}{x-1} + \frac{1-b}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda}, \quad B_1 = M_1\frac{x(x-1)}{x-\lambda}, \\ A_2 &= \frac{m(n+a+b)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)}, \quad B_2 = M_2\frac{x}{x-\lambda} \end{aligned} \tag{2.4}$$

で与えらえる．ここで，$\lambda, \mu, H, M_1, M_2$ は $x$ に依らない $t$ の関数である．□

*Proof.* 微分方程式 $L_1 = 0, L_2 = 0$ の定義より，$x$ の恒等式

$$L_1 \propto \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \end{vmatrix} = 0, \quad L_2 \propto \begin{vmatrix} y & y' & \dot{y} \\ u & u' & \dot{u} \\ v & v' & \dot{v} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

が成り立つ．ここで，$u = P_m, v = YQ_n$ とする．Wronski 行列式 (2.5) を計算すれば，微分方程式 $L_1 = 0, L_2 = 0$ (2.3) が得られる．■

以下では，微分方程式 $L_1 = 0, L_2 = 0$ (2.3) から，Painlevé 方程式 VI 型に対する時間発展非線形方程式，scalar 型 Lax 対，超幾何型特殊解の行列式表示が導出される．

2.3. **Time evolution equation.**

**Proposition 1.** 変数 $\lambda$ の 2 階非線形微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\Big)\Big(\frac{d\lambda}{dt}\Big)^2-\Big(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\Big)\frac{d\lambda}{dt}\\ &\quad+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\Big(\alpha+\beta\frac{t}{\lambda^2}+\gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\Big)\end{aligned} \tag{2.6}$$

が得られる．ここで，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は

$$\alpha=\frac{(m-n-a-b)^2}{2},\quad \beta=-\frac{(m+n+1)^2}{2},\quad \gamma=\frac{a^2}{2},\quad \delta=\frac{1-b^2}{2} \tag{2.7}$$

で与えられる．方程式 (2.6) は *Painlevé* 方程式 VI 型の時間発展非線形方程式 [13][16] である．□

*Proof.* 微分方程式 $L_1=0$, $L_2=0$ (2.3) の両立条件は,

$$\dot{A}_1=B_1''+2B_2'-A_1B_1'-A_1'B_1,\quad \dot{A}_2-A_1B_2'=B_2''-2A_2B_1'-A_2'B_1, \tag{2.8}$$

である．この両立条件の結果として,

$$\begin{aligned}t(t-1)H &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2\\ &\quad+\{(1-b)\lambda(\lambda-1)-(m+n+1)(\lambda-1)(\lambda-t)-a\lambda(\lambda-t)\}\mu\\ &\quad+(a+b+n)m(\lambda-t),\\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{1}{t(t-1)}\{2\lambda^3\mu+\lambda^2(-a-b-2\mu-m-n-2\mu t)\\ &\quad+\lambda(at+b+mt+m+nt+n+2\mu t+t)-t(m+n+1)\},\\ \frac{d\mu}{dt} &= \frac{1}{t(t-1)}\{\mu(2a\lambda-at+2b\lambda-b+2\lambda m-mt-m+2\lambda n-nt-n-t)\\ &\quad-m(a+b+n)+\mu^2\left(-3\lambda^2+2\lambda+2\lambda t-t\right)\},\\ M_1 &= -\frac{\lambda-t}{t(t-1)},\quad M_2=\frac{\mu(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\end{aligned} \tag{2.9}$$

が得られる．ここで，$t$ の関数 $H$ は Hamiltonian で Hamilton 系

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\mu},\quad \frac{d\mu}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\lambda}. \tag{2.10}$$

を満たす．(2.9) のはじめの 2 式より，$\dot{\mu},\mu$ を消去して，変数 $\lambda$ の時間発展非線形方程式 (2.6) が得られる．■

2.4. **Lax pair.**

**Proposition 2.** 線形微分方程式 $L_1=0$，変形微分方程式 $L_2=0$ *(2.3)* は,

(2.11)

$$\begin{aligned}&L_1=y''+A_1y'+A_2y=0,\quad L_2=\dot{y}+B_1y'+B_2y=0,\\ &A_1=\frac{-(m+n)}{x}+\frac{1-a}{x-1}+\frac{1-b}{x-t}-\frac{1}{x-\lambda},\quad B_1=-\frac{\lambda-t}{t(t-1)}\frac{x(x-1)}{x-\lambda},\\ &A_2=\frac{m(n+a+b)}{x(x-1)}-\frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)}+\frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)},\quad B_2=\frac{\mu(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\frac{x}{x-\lambda}\end{aligned}$$

に書き換えられる．2 つの微分方程式 *(2.11)* は *Painlevé* 方程式 VI 型 *(2.6)* の *scalar* 型 *Lax* 対 [13] [16] である．□

*Proof.* (2.9) より $M_1, M_2$ が書き換えられ，微分方程式 (2.11) が得られる．Proposition 1 で微分方程式 (2.3) の両立条件 (2.8) として時間発展非線形方程式 (2.6) が導出されているので，微分方程式 (2.11) は scalar 型 Lax 対である．■

2.5. **Special solutions.**

**Lemma 2** (Schur 関数による公式 [13])**.** 関数 $Y(x)$ に対して，$x = 0$ のまわりで *Taylor* 展開

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad p_0 = 1, \quad p_i = 0 \quad (i < 0), \tag{2.12}$$

を考える．このとき，*Padé* 近似問題 *(2.2)* を満たす $x$ の $m, n$ 次多項式 $P_m(x), Q_n(x)$ は，

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} s_{(m^n,i)} x^i, \quad Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} s_{((m+1)^i, m^{n-i})} (-x)^i, \tag{2.13}$$

で表示される．ここで，$s_\lambda$ は *Jacobi-Trudi* 公式 $s_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)} = \det(p_{\lambda_i - i + j})_{i,j=1}^{l}$ で定義される *Schur* 関数である．□

**Remark 1.** 多項式 $P_m(x)$, $Q_n(x)$*(2.13)* は，*Padé* 近似問題 *(2.2)* で定まる多項式 $P_m(x)$, $Q_n(x)$ と定数倍の自由度だけ異なる．しかし，$\tau$ 関数[7]の比によって約分されるため，*Proposition 3* と *Proposition 6* の結果には影響されない．□

**Proposition 3.** *parameter* が特殊値 *(2.7)* を取るとき，*Painlevé* 方程式 VI 型の時間発展非線形方程式 *(2.6)* の超幾何型特殊解 $\lambda$ の行列式表示 [4] [13] [16] は，

$$\lambda = \frac{(m+n+1)t}{m-n-a-b} \frac{\tau_{m,n}\tau_{m+1,n+1}}{\tau_{m,n+1}\tau_{m+1,n}}, \tag{2.14}$$

で与えられる．ここで，行列式 $\tau_{m,n} = s_{(m^n)}$ の要素 $p_k$ は

$$p_k = \frac{(-a-b)_k}{k!} {}_2F_1\Big(\begin{matrix} -k, -b \\ -a-b \end{matrix}; 1 - \frac{1}{t}\Big). \tag{2.15}$$

で表示され *Jacobi* 多項式である．□

*Proof.* 変数 $\lambda$ の特殊値は，$y$ の Wronski 行列式 (2.5) において $P_m(x), Q_n(x)$ によって定義され，Schur 関数による公式 (2.13) を用いれば得られる．■

2.6. **Main theorem.**

**Theorem 2.1.** 関数 $Y(x)$*(2.1)* に対して，$P_m(x), Q_n(x)$ を *(2.2)* で定める *Padé* 近似多項式とするとき，$P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を基本解に持つ 2 つの 2 階微分方程式 *(2.3)* から，*Painlevé* 方程式 VI 型に対する時間発展非線形方程式 *(2.6)*, *scalar* 型 *Lax* 対 *(2.11)*, 超幾何型特殊解の行列式表示 *(2.14)* が *3* つ同時に得られる．□

---

[7] $\tau$ 関数とは，Painlevé 方程式の場合，Hamiltonian $H$ を用いて $H(t) = \frac{d}{dt} \log \tau(t)$ 即ち $\tau(t) = \exp\Big(\int^t H(t)dt\Big)$ で定義される関数である．

## 3. Padé approximation method to case $q$-$D_5^{(1)}$

本章では，Padé 近似を応用して，$q$ 差分 Painlevé 方程式 $D_5^{(1)}$ 型に対する時間発展非線形方程式，scalar 型 Lax 対，超幾何型特殊解の行列式表示を導く．

### 3.1. Padé approximation problem.

parameter $q, a_i, b_i \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき，適当な関数

$$Y(x) := \frac{(a_1 x, a_2 x)_\infty}{(b_1 x, b_2 x)_\infty} \tag{3.1}$$

を与え，Padé 近似問題 (2.2) を考える．ここで，関数 $P_m(x)$，$Q_n(x)$ はそれぞれ $x$ の $m$，$n$ 次多項式とし，$P_m(x)$ の定数項を 1 とする．$q$-Pochhammer 記号は

$$(a_1, a_2, \cdots, a_i)_j := \prod_{k=0}^{j-1}(1 - a_1 q^k)(1 - a_2 q^k)\cdots(1 - a_i q^k). \tag{3.2}$$

とする．

### 3.2. Contiguity type equations.

parameter $a_i, b_i, m, n$ を shift させる作用素 $T$ を

$$T : (a_1, a_2, b_1, b_2, m, n) \to (qa_1, a_2, qb_1, b_2, m, n). \tag{3.3}$$

をする．また，この作用素 $T$ は $q$ 差分 Painlevé 方程式 $D_5^{(1)}$ 型の時間発展の方向を決定するので時間発展 (time evolution) と呼ぶ．

未知関数 $y(x)$ に対して，$y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を解に持つ，3 項間 $y(x), y(qx), \overline{y}(x)$ 変形 $q$ 差分方程式を $L_2(x)$ とし，3 項間 $y(x), \overline{y}(x), \overline{y}(x/q)$ 変形 $q$ 差分方程式を $L_3(x)$ とする．ここで，2 つの変形方程式 $L_2 = 0, L_3 = 0$ を contiguity type equations と呼び，記号 $\overline{F} := T(F)$, $\underline{F} := T^{-1}(F)$ とする．このとき，

**Lemma 3.** 変形 $q$ 差分方程式 $L_2 = 0, L_3 = 0$ は,

$$\begin{aligned} L_2(x) &= (1 - xf)\overline{y}(x) - (1 - a_2 x)y(qx) + (1 - b_1 x)y(x)/g = 0, \\ L_3(x) &= w(1 - x\overline{f}/q)y(x) + (1 - a_1 x)\overline{y}(x)/g - q^{m+n+1}(1 - b_2 x/q)\overline{y}(x/q) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

で与えられる．ここで，$\overline{f} = T(f)$ で，$f, g, w$ は $x$ に依らない変数である．□

*Proof.* 変形 $q$ 差分方程式 $L_2 = 0, L_3 = 0$ の定義より，$x$ の恒等式

$$L_2 \propto \begin{vmatrix} y(x) & y(qx) & \overline{y}(x) \\ u(x) & u(qx) & \overline{u}(x) \\ v(x) & v(qx) & \overline{v}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad L_3 \propto \begin{vmatrix} y(x) & \overline{y}(x) & \overline{y}(x/q) \\ u(x) & \overline{u}(x) & \overline{u}(x/q) \\ v(x) & \overline{v}(x) & \overline{v}(x/q) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

が成り立つ．ここで，$u = P_m, v = YQ_n$ とする. Casorati 行列式 (3.5) を計算すれば，変形 $q$ 差分方程式 $L_2 = 0, L_3 = 0$ (3.4) が得られる．■

以下では，変形 $q$ 差分方程式 $L_2 = 0, L_3 = 0$ (3.4) から，$q$ 差分 Painlevé 方程式 $D_5^{(1)}$ 型に対する時間発展非線形方程式，scalar 型 Lax 対，超幾何型特殊解の行列式表示が導出される．

3.3. **Time evolution equation.**

**Proposition 4.** 変形 $q$ 差分方程式 $L_2 = 0, L_3 = 0$*(3.4)* の両立条件として，変数 $w$ を含まない 2 変数 $f, g$ の連立 *1* 階非線形 $q$ 差分方程式 *(*1 変数の 2 階非線形 $q$ 差分方程式*)*

$$gg\!\!\underset{-}{\phantom{g}} = \frac{1}{qa_0b_0}\frac{(f-a_1)(f-b_1)}{(f-a_2)(f-b_2)}, \quad f\overline{f} = a_2b_2\frac{(g-b_1/a_0a_2)(g-a_1/b_0b_2)}{(g-1)(g-1/qa_0b_0)} \tag{3.6}$$

が得られる．方程式 *(3.6)* は $q$ 差分 *Painlevé* 方程式 $D_5^{(1)}$ 型の時間発展非線形方程式 [1][2][3][16] である．□

3.4. **Lax pair.**
未知関数 $y(x)$ に対して，$y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を解に持つ 3 項間 $y(qx), y(x), y(x/q)$ の線形 $q$ 差分方程式を $L_1 = 0$ とする．このとき，

**Proposition 5.** 線形 $q$ 差分方程式 $L_1 = 0$，変形 $q$ 差分方程式 $L_2 = 0$*(3.4)* は，

$$\begin{aligned} L_1(x) = &\Big[(1-g)(1-qa_0b_0g) - \frac{x(a_1-b_0b_2g)(b_1-a_0a_2g)}{f}\Big]y(x) \\ &+ \frac{g(1-a_1x)(1-a_2x)}{1-fx}\Big[y(qx) - \frac{1-b_1x}{g(1-a_2x)}y(x)\Big] \\ &+ \frac{qa_0b_0g(1-b_1x/q)(1-b_2x/q)}{1-fx/q}\Big[y(x/q) - \frac{g(1-a_2x/q)}{1-b_1x/q}y(x)\Big] = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$L_2(x) = (1-xf)\overline{y}(x) - (1-a_2x)y(qx) + (1-b_1x)y(x)/g = 0$$

で与えられる．線形 $q$ 差分方程式 $L_1 = 0$，変形 $q$ 差分方程式 $L_2 = 0$*(3.7)* は $q$ 差分 *Painlevé* 方程式 $D_5^{(1)}$ 型 *(3.6)* の *scalar* 型 *Lax* 対 [3][14][16] で，$2\times 2$ 行列型 *Lax* 対 [2] と等価である．□

*Proof.* 変形 $q$ 差分方程式 $L_2(x), L_2(x/q), L_3(x)$ (3.4) から 2 項 $\overline{y}(x), \overline{y}(x/q)$ を消去すれば，線形 $q$ 差分方程式 $L_1 = 0$(3.7) が得られる．Proposition 4 で変形 $q$ 差分方程式 (3.4) の両立条件から時間発展非線形方程式 (2.6) が導出されている．$L_1 = 0, L_2 = 0$ の両立条件と $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ の両立条件は等しいので，$q$ 差分方程式 (3.7) は scalar 型 Lax 対である．■

3.5. **Special solutions.**

**Proposition 6.** *parameter* が特殊値 $a_0 = q^m$*,* $b_0 = q^n$ を取るとき，$q$ 差分 *Painlevé* 方程式 $D_5^{(1)}$ 型の時間発展非線形方程式 *(3.6)* の超幾何型特殊解 $f, g$ の行列式表示 [10][16] は，

$$\begin{aligned} \frac{1-f/a_1}{1-f/a_2} &= \frac{a_1\prod_{i=1}^2(1-b_i/a_1)}{a_2\prod_{i=1}^2(1-b_i/a_2)}\frac{T_{a_1}(\tau_{m,n+1})T_{a_1}^{-1}(\tau_{m+1,n})}{T_{a_2}(\tau_{m,n+1})T_{a_2}^{-1}(\tau_{m+1,n})}, \\ g &= \frac{a_1(1-b_1/a_1)}{q^na_2(1-b_2/a_2)}\frac{T_{a_1}(\tau_{m,n+1})T_{a_1}^{-1}(\overline{\tau}_{m+1,n})}{T_{a_2}(\overline{\tau}_{m,n+1})T_{a_2}^{-1}(\tau_{m+1,n})} \end{aligned} \tag{3.8}$$

で与えられる．ここで，行列式 $\tau_{m,n} = s_{(m^n)}$ の要素 $p_k$ は，

$$p_k = b_2^k\frac{(a_2/b_2;q)_k}{(q;q)_k}\,{}_2\varphi_1\Big(\begin{matrix}q^{-k}, a_1/b_1\\ b_2q^{-k+1}/a_2\end{matrix};q,\frac{b_1}{a_2}q\Big). \tag{3.9}$$

で表示され *little q-Jacobi* 多項式である．ここで，*parameter* $a_i, b_i, m, n$ に依るすべての量である $F$ に対して，$T_{a_i}(F) = F|_{a_i \to qa_i}$, $T_{a_i}^{-1}(F) = F|_{a_i \to a_i/q}$ とする．□

*Proof.* 変数 $f, g$ の特殊値は，$y$ の Casorati 行列式 (3.5) において，$P_m(x), Q_n(x)$ によって定義され，Schur 関数による公式 (2.13) を用いれば得られる．■

**Remark 2.** 一般の *(3.1)(3.9)* に関して [12] で，

$$\prod_{i=1}^{N+1} \frac{(a_i x)_\infty}{(b_i x)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{N+1} \frac{b_s^k - a_s^k}{k(1-q^k)} x^k\Big). \tag{3.10}$$

が述べらている．□

### 3.6. Main theorem.

**Theorem 3.1.** 関数 $Y(x)$*(3.1)* に対して，$P_m(x), Q_n(x)$ を *(2.2)* で定める *Padé* 近似多項式とするとき，$P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を基本解に持つ 2 つの変形 2 階 $q$ 差分方程式 *(3.4)* から，$q$ 差分 *Painlevé* 方程式 $D_5^{(1)}$ 型に対する時間発展非線形方程式 *(3.6), scalar* 型 *Lax* 対 *(3.7),* 超幾何型特殊解の行列式表示 *(3.8)* が *3* つ同時に得られる．□


## Acknowledgment

本研究を行う上で，山田泰彦氏の限りない議論と価値ある助言に感謝する．


## References


[1] Ikawa Y., *Hypergeometric Solutions for the q-Painlevé Equation of Type* $E_6^{(1)}$ *by the Padé method*, Lett. Math. Phys., Volume **103**, Issue 7 (2013), 743-763.

[2] Jimbo M. and Sakai H., *A q-analog of the sixth Painlevé equation*, Lett. Math. Phys., **38** (1996), 145–154.

[3] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y., *Geometric aspects of Painlevé equations*, arXiv 1509.08186 [nlin.SI].

[4] Masuda T., *On a class of algebraic solutions to the Painlevé VI equation, its determinant formula and coalescence cascade*, Funkcial. Ekvac. **46** (2003), 121-171.

[5] Nagao H., *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations*. Lett. Math. Phys. **105** (2015), no. 4, 503–521.

[6] Nagao, H., *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations II (differential grid version)*, Lett. Math. Phys., to appear.

[7] Nagao H., *Lax pairs for additive difference Painlevé equations*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, to appear.

[8] Nagao H., and Yamada Y., *Study of q-Garnier system by Padé method*, Funkcial. Ekvac., to appear.

[9] Noumi M., Tsujimoto S., and Yamada Y., *Padé interpolation for elliptic Painlevé equation*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., Volume **40** (2013), 463–482.

[10] Sakai H., *Casorati determinant solutions for the q-difference sixth Painlevé equations*, Nonlinearity, **11** (1998), 823–833.

[11] Sakai H., *Rational surfaces with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys., **220** (2001), 165-221.

[12] Tsuda T., *On an integrable system of q-difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to q-Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **293** (2010), 347–359.

[13] Yamada Y., *Padé method to Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 83–92.

[14] Yamada Y., *Lax formalism for q-Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type* $E_n^{(1)}$, IMRN, **17** (2011), 3823–3838.

[15] Yamada Y., *A simple expression for discrete Painlevé equations*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B**47** (2014), 087–095.

[16] Yoshioka R., *A construction of special solution for q-Painlevé VI equation by the Padé approximation*. Master thesis in Kobe University (Japanese) (2010)

Department of Arts and Science, National Institute of Technology, Akashi College, Hyogo 674-8501, Japan
*E-mail address*: `nagao@akashi.ac.jp`