

空間非一様性をもつFitzHugh-Nagumo型反応拡散系 におけるヘテロクリニック解の存在について

梶原 亮 (首都大学東京大学院理工学研究科数理情報科学専攻 博士後期課程)*

FitzHugh-Nagumo型反応拡散系(以下FHNモデル)は, 神経細胞等に現れる興奮現象を記述する基本的なモデルとして提案されたモデルであるが, 方程式として非常に多様な構造をもつことから, 数学においても様々な研究がなされている. 我々は, 特にその変分構造に着目した研究を行った[3].

我々の研究を紹介するにあたって, Chen, Kung, Moritaによる研究[2]を紹介する.

まず, いくつか記号を導入する. a, γ をそれぞれ任意の正数とし, $\hat{v} \in C^\infty(\mathbb{R})$ を, 以下を満たすような関数として定める:

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} a/\gamma, & x \geq 1, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

そして, \hat{u} を $\hat{u} = -\hat{v}'' + \gamma\hat{v}$ で定義する. さらに, \mathcal{L} は任意の $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ に対して, $-\phi'' + \gamma\phi = \psi$ のただ一つの解 $\phi \in H^3(\mathbb{R})$ を対応させる作用素とする(すなわち $\phi = \mathcal{L}\psi$).

さて, Chenらは, [2]において, 次で定められるエネルギー汎関数 $J: H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ の最小化問題(2)を考えた.

$$J(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta}{2}(u')^2 + \frac{1}{2} \left(v' - \frac{u'}{\gamma} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} \left(v - \frac{u}{\gamma} \right)^2 + W(u) dx, \quad (1)$$

$$\sigma_0 = \inf\{J(\psi) : \psi \in H^1(\mathbb{R})\}. \quad (2)$$

上式において θ, u, v, W はそれぞれ $\theta > 0, u = \hat{u} + \psi, v = \hat{v} + \mathcal{L}\psi, W(t) = t^2(t-a)^2/4$ である. そして, Chenらは, (2)が $\bar{\psi} \in H^1(\mathbb{R})$ をもつことを示し, さらに $\theta = d-1/\gamma^2 > 0$ とし, $\beta \in (0, 1/2)$ を任意に選び, (a, γ) が $(a, \gamma) = (2(\beta+1)/3, 9(2\beta^2-5\beta+2)^{-1})$ を満足するとき, $(\bar{u}, \bar{v}) = (\hat{u} + \bar{\psi}, \hat{v} + \mathcal{L}\bar{\psi})$ がFHNモデルの2つの安定な平衡点 $(0, 0), (a, a/\gamma)$ を結ぶ定常解(ヘテロクリニック解)となることを示した. つまり, (\bar{u}, \bar{v}) は次の方程式の解となる:

$$\begin{cases} 0 = d\bar{u}''(x) + f(\bar{u}(x)) - \bar{v}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ 0 = \bar{v}''(x) + \bar{u}(x) - \gamma\bar{v}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ (\bar{u}(x), \bar{v}(x)) \rightarrow (0, 0) & x \rightarrow -\infty, \\ (\bar{u}(x), \bar{v}(x)) \rightarrow (a, a/\gamma) & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3)$$

ここで, f は $f(t) = t(t-\beta)(1-t)$ とする.

この研究を参考に, 我々は, (2)に空間非一様性 $\mu(x)$ をもたせたエネルギー汎関数 $\tilde{J}: H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を定義し, その最小化問題(5)を考えた[3].

$$\tilde{J}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta}{2}(u')^2 + \frac{1}{2} \left(v' - \frac{u'}{\gamma} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} \left(v - \frac{u}{\gamma} \right)^2 + \mu(x)W(u) dx, \quad (4)$$

$$\sigma = \{\tilde{J}(\psi) : \psi \in H^1(\mathbb{R})\}. \quad (5)$$

ここで, μ は $\mu \in L^\infty(\mathbb{R})$ で, かつ以下を満足する関数である.

* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢1-1 首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻
e-mail: kajiwara-takashi1@ed.tmu.ac.jp

(μ_1) ある定数 $\mu_1 > 0$ が存在して, $\mu_1 \leq \mu(x) \leq 1$ for all $x \in \mathbb{R}$.
さらに, $\mu \neq 1$.

(μ_2) $(1 - \mu(x)) \in L^1(\mathbb{R})$ で, $\text{かつ } (1 - \mu(x)) \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow \infty$.

$J(\psi)$ は u に関する平行移動不変性を持つことが分かる. すなわち, 与えられた $\psi \in H^1(\mathbb{R})$, $L \in \mathbb{R}$ に対して, $\tilde{u}(x) = u(x + L) = \hat{u} + \psi(x + L)$, $\tilde{\psi} = \tilde{u}(x) - \hat{u}$ とすると, $J(\psi) = J(\tilde{\psi})$ が成立する. Chen らは, この平行移動不変性を利用して, ミニマイザーの存在を示している. 一方で, $\tilde{J}(\psi)$ は一般には平行移動不変性は持たない. 本研究は, 平行移動不変性が成り立たない状況でミニマイザーの存在を示すことができるかという点に主眼を置いている. そして我々は次の結果を得た.

定理 1. $a > 0$, $\theta = d - 1/\gamma^2 > 0$ とする. さらに, $\mu \in L^\infty(\mathbb{R})$ は (μ_1) 及び (μ_2) を満足するとする. このとき, 最小化問題 (5) はミニマイザー $\bar{\psi} \in H^1(\mathbb{R})$ をもつ. また, $(\bar{u}, \bar{v}) = (\hat{u} + \bar{\psi}, \hat{v} + \mathcal{L}\bar{\psi})$ としたとき, (\bar{u}, \bar{v}) は次の方程式を満足する.

$$\begin{cases} -d\bar{u}''(x) = \mu(x)\bar{u}(x)(\bar{u}(x) - a/2)(a - \bar{u}(x)) - \bar{v}(x) + \bar{u}(x)/\gamma, & x \in \mathbb{R}, \\ -\bar{v}''(x) = \bar{u}(x) - \gamma\bar{v}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ (\bar{u}(x), \bar{v}(x)) \rightarrow (0, 0), & x \rightarrow -\infty, \\ (\bar{u}(x), \bar{v}(x)) \rightarrow (a, a/\gamma), & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (6)$$

定理1によって, 仮定 (μ_1) 及び (μ_2) を満たすような $\mu(x)$ を付加したモデルにおいてもミニマイザーが存在することがいえた.

本研究と関連する研究としては, 非空間一様性をもつ Allen-Cahn 型モデルに関する研究が挙げられる. Bonheure, Sanchez [1] は, 次のような空間非一様性 $h(x)$ を含む方程式を考えた.

$$\begin{cases} u''(x) + h(x)u(x)(1 - u(x)^2) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \rightarrow \pm 1, & x \rightarrow \pm\infty \\ u'(x) \rightarrow 0, & x \rightarrow \pm\infty. \end{cases}$$

このとき, 上式に付随するエネルギーは次で定義される:

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}(u')^2 + \frac{h(x)}{4}(u^2 - 1)^2 \right] dx. \quad (7)$$

Bonheure, Sanchez は適切な関数空間 X のもとで, 最小化問題 $\sigma_e = \{E(u) : u \in X\}$ を考えることで, 二つの安定な平衡点 $u = -1$, $u = 1$ を結ぶヘテロクリニック解の存在を示した [1]. また, Sourdis は, (7) において, $u \in \mathbb{R}$ を $u \in \mathbb{R}^N$ と多次元に拡張したモデルにおけるヘテロクリニック解の存在を示している [4].

定理の証明にあたって, 我々は (5) の最小化列を $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とし, y_m, y'_m を $y_m \equiv \min\{x \in \mathbb{R} : |\hat{u}(x) + \psi_m(x)| = 3\rho/2\}$, $y'_m \equiv \max\{x \in \mathbb{R} : |\hat{u}(x) + \psi_m(x) - a| = 3\rho/2\}$ としたときに, $[y_m, y'_m]$ が $m \in \mathbb{N}$ に依らないコンパクトな区間に含まれることを示し, ミニマイザーが存在することを証明をした. このとき, 重要なとなるのが, 次の補題である.

補題 1. $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ とし, ρ は十分小さい正数, ρ_1 は $\epsilon(\rho) \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow 0$) なる $\epsilon(\rho)$ に対して, $\rho_1 < \epsilon(\rho)$ を満足する正数とする. このとき, (i), (ii) を満たす.

(i) u は $[y_1, y_2]$ で $a - \rho$ から $a - 3\rho/2$ へ遷移するとする。さらに, $j + 1 < y_1$ かつ

$$\|u - a\|_{H^1(I_j)} + \|v - a/\gamma\|_{H^3(I_j)} < C_1\sqrt{\rho_1}$$

を満たすような $j \in \mathbb{Z}$ が存在すると仮定する。ただし, $I_j = [j, j + 1]$ である。このとき, ある $\epsilon_1 > 0$, $\phi \in H^1(\mathbb{R})$ が存在して, $\tilde{J}(\phi) < \tilde{J}(\psi) - \epsilon_1$ を満たす。

(ii) u は $[y_1, y_2]$ で ρ から $3\rho/2$ へ遷移するとする。さらに, $j > y_2$ かつ

$$\|u\|_{H^1(I_j)} + \|v/\gamma\|_{H^3(I_j)} < C_2\sqrt{\rho_1}$$

を満たすような $j \in \mathbb{Z}$ が存在すると仮定する。このとき, ある $\epsilon_1 > 0$, $\phi \in H^1(\mathbb{R})$ が存在して, $\tilde{J}(\phi) < \tilde{J}(\psi) - \epsilon_1$ を満たす。

この補題を用いることで, $y'_m - y_m$ が $m \in \mathbb{N}$ に依らない定数 $C_3 > 0$ で, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $y'_m - y_m < C_3$ と評価することができる。 $[y_m, y'_m]$ が $m \in \mathbb{N}$ に依らないコンパクト集合に含まれるということは, $\sigma < \sigma_0$ であること及び, 背理法によって, $y'_{m_j} \rightarrow \infty$ となる $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が存在すると仮定したときに, $\tilde{J}(\psi_{m_j}) \rightarrow \sigma_0$ となることから導かれる。

この証明の基本的なアイデアは [2] に基づいているものの, $[y_m, y'_m]$ に着目したアプローチは [2] とは異なるものであるということを強調したい。

さて, 定理 1 において, 特に $(a, \gamma) = (2(\beta + 1)/3, 9(2\beta^2 - 5\beta + 2)^{-1})$ である場合 (ただし β は $\beta \in (0, 1/2)$), (6) の第一式は,

$$-d\bar{u}''(x) = \mu(x)f(\bar{u}(x)) - \bar{v}(x) + (1 - \mu(x))\bar{u}(x)/\gamma, \quad x \in \mathbb{R}$$

と書き換えられ, 元の FHN モデル (3) と比較すると, f が空間非一様性 $\mu(x)$ をもち, さらに $(1 - \mu(x))\bar{u}(x)/\gamma$ を加えたモデルとなっていることが分かる。本講演では, μ が $(\mu 1)$ および

$$F\left(\frac{\beta}{2}\right) \int_{L_0 - \beta^2/(8\sigma_0)}^{L_0} (1 - \mu(x)) dx \geq |F(1)| \int_{L_0}^{\infty} (1 - \mu(x)) dx,$$

を満足するとき (ただし, $F(t) \equiv -\int_0^t f(s) ds$ とする), 上式から $(1 - \mu(x))\bar{u}(x)/\gamma$ を取り除いたモデル, すなわち,

$$\begin{cases} 0 = du''(x) + \mu(x)f(u(x)) - v(x), & x \in \mathbb{R}, \\ 0 = v''(x) + u(x) - \gamma v(x), & x \in \mathbb{R}, \\ (u(x), v(x)) \rightarrow (0, 0) & x \rightarrow -\infty, \\ (u(x), v(x)) \rightarrow (a, a/\gamma) & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

を満たすようなヘテロクリニック解が存在することにも言及する。

参考文献

- [1] D. Bonheure, L. Sanchez, Heteroclinic orbits for some classes of second and fourth order differential equations, Handbook of Differential Equations, Vol. 3 (2006) 103-202.
- [2] C. N. Chen, S. Y. Kung, Y. Morita, Planar Standing wavefronts in the FitzHugh-Nagumo equations, SIAM J. Math. Anal., **46** (2014), 657-690.
- [3] T. Kajiwara, A Heteroclinic Solution to a Variational Problem Corresponding to FitzHugh-Nagumo type Reaction-Diffusion System with Heterogeneity, preprint.
- [4] C. Sourdis, The heteroclinic connection problem for general double-well potentials, arXiv:1311.2856v2 (2014).