

ハザードレート推定に関わる推定誤差とクレジットデリバティブへの影響

蛇口 紘史

Hirofumi Hebiguchi

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻.

Abstract

数理ファイナンスにおける研究分野の一つであるクレジットデリバティブで、倒産確率の数理モデル化の際に、ハザードレートを用いる方法がある。そこでハザードレートを観測できない確率微分方程式に従うとする場合がよく考えられるが、実際にはハザードレートやその確率微分方程式を推定する必要がある、一般に推定誤差が含まれる。本研究ではそのパラメータ推定誤差や、フィルタリングを用いたハザードレートの推定誤差がクレジットデリバティブに与える影響を考察する。

1 はじめに

1.1 クレジットデリバティブ

本研究は確率解析のファイナンスへの応用と言えるが、初めにクレジットデリバティブと数学がどのように関わるかについて説明する。クレジットデリバティブとは、簡単に言ってしまうと企業や国の倒産(デフォルト)のリスクに関係する金融商品のことである。クレジットデリバティブの中には様々な種類の金融派生商品が存在するが、ここでは最も簡単な例としてクレジットデフォルトスワップ(CDS)を紹介する。例えばある会社 A が会社 B から借金をしている場合を考えよう。その時、会社 A がデフォルトすれば、会社 B は借金が返済されないために損失を被る。この損失のリスクが、先に述べたデフォルトのリスクであり、このリスクを解消するのが CDS である。具体的には、CDS とは金融機関 C がデフォルトによる会社 B の損失を肩代わりする代わりに、契約時に CDS の契約料、定期的なスプレッドと呼ばれる手数料を会社 B から受け取る契約である。被保険者を会社 A とした生命保険であると考えれば想像しやすいであろう。また補足として、クレジットデリバティブにおいて会社 A のことを参照体と呼ぶが、参照体が複数の企業で構成される場合もあり、そのような場合は参照体同士の倒産時刻の相関も考える必要がある。ここで問題となるのは CDS の契約料とスプレッドをどのようにして決めるかである。そこで実際に金融機関は数学を用いてモデルを作り、これらの値を計算しているわけである。

この様なクレジットデリバティブで重要となるデフォルトに対する数理モデルには、大きく分けて構造型モデルと誘導型モデルと呼ばれる二つのモデルがあるが、本研究では誘導型モデルについて考える。誘導型モデルでは企業のデフォルトは、ランダムに突発的に起こることを仮定しており、デフォルト強度と呼ばれるデフォルトの起こりやすさを表すパラメータに依存している。よってデフォルト強度がクレジットデリバティブの価値やスプレッドの計算に影響を及ぼす。しかしながら、デフォルト強度は金融市場から直接観測できるパラメータではなく、観測できる情報から推定しなければならない。よってその推定誤差の影響は応用上重要なものと考えられる。Hebiguchi et al. [4] ではデフォルト強度の推定誤差がクレジットデリバティブを売り出した金融機関のポートフォリオに与える影響について調べている。前述の説明では、クレジットデリバティブを倒産のリスクを解消する手段として説明したが、一部のクレジットデリバティブには株のように市場が存在し、投資目的での売買も盛んに行われている。従って、一部のクレジットデリバティブやスプレッドの市場価格については観測可能であり、推定にはこれらを利用する。ただし先に述べたクレジットデリバティブやスプレッドとは別物である。より詳しいクレジットデリバティブの説明やモデリングについては [2] などがある。

1.2 研究概要

Frey, Runggaldier[7] で、流通市場から得られる、参照体のクレジットデリバティブの価値またはスプレッドの情報と、デフォルトの有無に関する情報の二つを用いた連続時間のフィルタリングによるデフォルト強度の推定手法が提案された。ここではデフォルト強度は観測不可能なマルコフ過程に依存しており、観測されるクレジットデリバティブまたはスプレッドの情報がそのマルコフ過程に基づいた値であるとしている。

このような隠れマルコフと呼ばれる不完全な情報を用いたフィルタリング問題は、古くから応用分野で用いられており、数理ファイナンスの分野でも度々用いられている。[7] では、デフォルト強度のファクタ過程に Frey, Schmidt (FS) [6] で提案された FS モデルと呼ばれるマルコフ連鎖に依存した連続な確率過程のモデルを用いている。このモデルはファクタ過程自身がフィルタリング問題の解であり、デフォルト強度の伝播についてもフィルトレーションが与える影響で表現することが可能である。その一方で、このモデルのデータから推定されるパラメータは、その構造から推定誤差が含まれる。実際に数値としてデフォルト強度の推定結果を得るにあたり、ファクタ過程のパラメータの推定誤差がどの程度フィルタリングの結果に影響を及ぼすかは重要であり、しばしば研究対象となるが、この FS モデルについては先行研究では触れられていない。そこで本研究では [7] で提案されたデフォルト強度の推定方法において、パラメータの誤差がフィルタリングに与える影響について考察する。また、本研究のフィルタリングによる推定量は一般的に確率偏微分方程式に従うことが知られており、一般に解析解を求めることはまれである。そこで数値的に推定値を求めることに伴い生じる、時間の離散化が与える影響についても考える。

ファイナンスにおける確率解析などの理論の書籍としては [10]、フィルタリングや隠れマルコフについての書籍としては [8] などがある。

2 観測過程とデフォルト強度の推定値

この節で投資家が観測できる情報を数学的に構築し、デフォルト強度の推定値を定義する。フィルトレーション付き完備確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ として、この節で現れる確率過程は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合であるとする。ただし \mathcal{F}_t は usual condition を満たすとする。ここでは参照体の数を m としたクレジットポートフォリオを考える。参照体 i のデフォルト時刻を $\{\mathcal{F}_t\}$ -停止時刻 τ_i として、

$$\mathbf{Y} = (Y_{t,1}, \dots, Y_{t,m})_{t \geq 0}, \quad Y_{t,i} = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}},$$

とする。ここで $\mathbf{1}_A$ は集合 A に対する定義関数とする。観測過程 \mathbf{Y} はある確率微分方程式に従うが、長くなるため詳細は [7] を参照して頂きたい。また \mathbf{Y} から生成されるフィルトレーションを $\mathcal{H}_t = \sigma(\mathbf{Y}_s : s \leq t)$ とする。つまり観測過程 \mathbf{Y} がデフォルトの情報であり、 \mathbf{Y} は $\{\mathcal{H}_t\}$ -適合である。また τ_i は $\{\mathcal{H}_t\}$ -停止時刻でもある。 \mathbf{Z} は前述したクレジットデリバティブ市場から得られる、とあるクレジットデリバティブに関する観測過程であり、次の l 次元確率過程で与えられるとする。

$$d\mathbf{Z}_t = \mathbf{a}_t(\mathbf{p}_t)dt + v d\beta_t.$$

ここで状態空間 $S^{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^d$ とし、 $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$ はデフォルト強度に影響を与える連続時間のファクタ過程であり、 $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な $S^{\mathbf{p}}$ -値マルコフ過程である。 β は l 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$ -ブラウン運動で \mathbf{p}, \mathbf{Y} と独立である。更に v は l 次元正則行列で、 $\mathbf{a}_t : \Omega \times S^{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbb{R}^l$ は \mathcal{H}_t -可測で連続かつ有界である。 $\Delta > 0$ とすると、実際の観測値は離散時間 $t_k = k\Delta$ に \mathbf{z}_k として観測される。 \mathbf{Z} から生成される $\mathcal{F}_t^{\mathbf{Z}} = \sigma(\mathbf{Z}_s : s \leq t)$ とし、 $\mathcal{F}_t^I = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{F}_t^{\mathbf{Z}} \subset \mathcal{F}_t$ と表す。この \mathcal{F}_t^I が投資家が利用できることのできるフィルトレーションになる。さらにデフォルト強度のシグナルは $\lambda(\mathbf{p}_t)$ とする。ただし、 $\lambda(\cdot)$ は既知な可測関数とする。よってデフォルト強度の情報 \mathcal{F}_t^I の下での推定量は次の式で表される。

$$\pi_t \lambda := E[\lambda(\mathbf{p}_t) | \mathcal{F}_t^I].$$

この推定量は平均二乗誤差 $E[|\lambda(\mathbf{p}_t) - z|^2]$ を最小にする $z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t^I, P)$ であり、一般に $\lambda(\mathbf{p}_t)$ の非線形フィルタと呼ばれる。この推定量を求めることが本研究の目的の一つである

3 FS モデルとデフォルト強度

FS モデルの概要を与える。詳細については [7], [6] を参照して頂きたい。ここではフィルトレーション付き完備確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}, P)$ とする。ただし $\tilde{\mathcal{F}}_t$ は usual condition を満たすとする。 $\alpha(\cdot)$ は既知な関数

とし、状態空間を $S^\Psi = \{1, \dots, K\}$ とするマルコフ連鎖 Ψ は経済の状況を表している。市場価値 \mathbf{Z} とは異なる、 $\{\mathcal{F}_t\}$ - 適合なクレジットデリバティブに関する過程 U を次の式で与える。

$$U_t = \int_0^t \alpha(\Psi_s) ds + B_t.$$

ここで B_t は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ - ブラウン運動で、 Ψ, \mathbf{Y} と独立とする。この $\tilde{\mathcal{F}}_t$ に対するフィルタリングの解 $\mathbf{p} = (p_t^1, \dots, p_t^K)_{t \geq 0}, p_t^k = P(\Psi_t = k | \mathcal{F}_t), 1 \leq k \leq K$, が FS モデルにおけるファクタ過程であり、次の確率微分方程式に従う。

$$dp_t^k = \sum_{i=1}^K Q_{i,k}^\Psi p_t^i dt + \sum_{i=1}^m \gamma_i^k(\mathbf{p}_{t-}) dM_{t,i} + \delta^k(\mathbf{p}_{t-}) dW_t. \quad (1)$$

ここで W_t は $\{\mathcal{F}_t\}$ - イノベーションブラウン運動、 Q^Ψ は Ψ の生成行列、 $v_i(\cdot)$ は既知な可測関数とする。

$$\gamma_j^k(\mathbf{p}) := p^k \left(\frac{v_j(k)}{\sum_{n=1}^K v_j(n) p^n} - 1 \right), \quad \delta^k(\mathbf{p}) := p^k (\alpha(k) - \sum_{n=1}^K p^n \alpha(n)), \quad M_{t,j} := Y_{t,j} - \int_0^t (1 - Y_{s,j}) \lambda_j(\mathbf{p}_s) ds.$$

また FS モデルにおけるシグナル過程であるデフォルト強度のフィルタは次の式で表すことができる。

$$E[v_i(\Psi) | \mathcal{F}_t] = \sum_{k=1}^K v_i(k) p_t^k =: \lambda_i(\mathbf{p}_t).$$

ただし観測過程 U_t は実際には観測できないため、 \mathcal{F}_t^I の下でのデフォルト強度の推定で考える。よってデフォルト強度の推定量及び、誤差を含んだファクタ過程 $\hat{\mathbf{p}}$ によるデフォルト強度の推定量は次のようになる。

$$\pi_t \lambda = E[\lambda_i(\mathbf{p}_t) | \mathcal{F}_t^I] = \sum_{i=1}^K v_i(k) E[p_t^k | \mathcal{F}_t^I],$$

$$\hat{\pi}_t \lambda = E[\hat{\lambda}_i(\hat{\mathbf{p}}_t) | \mathcal{F}_t^I] = \sum_{i=1}^K \hat{v}_i(k) E[\hat{p}_t^k | \mathcal{F}_t^I].$$

したがって、デフォルト強度の推定はファクタ過程 \mathbf{p} の推定に帰着する。

4 粒子フィルタ

フィルタリング問題に代表されるような条件付き期待値について、数値計算手法はまだ十分に確立されていない。そこで今回のモデルに対してフィルタリングの推定値を得るための手法として、[7] で用いられた粒子フィルタをここでも用いる。粒子フィルタは観測過程に基づく隠れたファクタ過程の状態を多数の粒子から逐次的に近似し推定値を得る方法で広く知られており、尤度が重要な役割を果たす。

まず初めに [7] で求められた粒子フィルタの尤度を示していく。デフォルト時刻の順番を $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_m$ とする。 $t + T_{n-1} \in [T_{n-1}, T_n)$ の場合の \mathbf{p}, \mathbf{Y} について次の式で定義する。

$$\mathbf{p}_{t+T_{n-1}} = \tilde{\mathbf{p}}_t, \quad \mathbf{Y}_t = \tilde{\mathbf{Y}}_t, \quad T_{n-1} \leq t + T_{n-1} < T_n.$$

ここで粒子の数を $1 \leq i \leq b$, 時間の離散化の幅を $\Delta = t_{k+1} - t_k$ とすると、Frey, Runggaldier [7] の Theorem 3.1 より、 $(t_k, t_{k+1}]$ の間にデフォルトが起こっていない場合の尤度 L^i は次式で与えられる。

$$L^i := \exp \left\{ - \int_0^\Delta \bar{\lambda}(\tilde{\mathbf{p}}_s, \mathbf{Y}_{t_k}) ds + \int_0^\Delta \mathbf{a}_{t_k+s}^\top(\tilde{\mathbf{p}}_s) \Sigma_Z^{-1} d\mathbf{Z}_{t_k+s} - \frac{1}{2} \int_0^\Delta \|\mathbf{a}_{t_k+s}(\tilde{\mathbf{p}}_s)\|_{\Sigma_Z^{-1}}^2 ds \right\}.$$

ただし、 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ に対して、

$$\Sigma_Z^{-1} := (v v^\top)^{-1}, \quad \|\mathbf{a}\|_{\Sigma_Z^{-1}}^2 := \mathbf{a}^\top \Sigma_Z^{-1} \mathbf{a}, \quad \bar{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m (1 - y_i) \lambda_i(\mathbf{p}).$$

とする. 更に Frey, Runggaldier [7] の Theorem 3.4 より, $(t_k, t_{k+1}]$ の間にデフォルトが起きた場合の尤度 \tilde{L}^i は次式で与えられる.

$$\tilde{L}^i = L^i \lambda_\xi(\mathbf{p}^i).$$

ただし, ξ はデフォルトした参照体の番号とする. フィルタリングによるデフォルト強度の推定量は, Kallianpur-Striebel(ベイズ)の公式などを使い, 既に紹介した尤度を用いることで次の式に近似される.

$$E[\lambda(\mathbf{p}_t)|\mathcal{F}_t^I] = \frac{E^{P_0}[\lambda(\mathbf{p}_t)N_t|\mathcal{F}_t^I]}{E^{P_0}[N_t|\mathcal{F}_t^I]} \approx \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{p}_{t,i}) \Lambda_t^i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda_t^i} = \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{p}_{t,i}) \frac{\Lambda_t^i}{\sum_{j=1}^n \Lambda_t^j}.$$

ただし, P_0 と P は同値な確率測度で, 測度変換のラドン・ニコディム微分が N_t であり, \mathbf{Z} は P_0 の下でブラウン運動である. $\mathbf{p}_{t,i}$ は \mathbf{p} の独立同分布な標本である. また

$$\Lambda_t^i = \begin{cases} \tilde{L}_t^i & t = \tau_j, \quad 1 \leq j \leq m, \\ L_t^i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

次に粒子フィルタを用いた推定のアルゴリズムを紹介する. アルゴリズムは [7] を参照しているが, リサンプリングの部分を省略し片山 [1] で紹介されてるガウシアン粒子フィルタと呼ばれる手法を用いた. 一般的にはリサンプリングを用いた粒子フィルタとガウシアン粒子フィルタの精度は優劣がつけがたいとされている.

アルゴリズム 1

1. 初期値 $\{\mathbf{p}_0^1, \dots, \mathbf{p}_0^b\}$ を与える.
2. (時間更新ステップ) 式 (1) に従って粒子 $\{\mathbf{p}_k^1, \dots, \mathbf{p}_k^b\}$ を始点 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k^i$ として更新する. ただし式 (1) の近似にはオイラー・丸山近似を用いる.
3. (観測更新ステップ, no default) $(t_k, t_{k+1}]$ の間にデフォルトがなければ, 観測された \mathbf{Z} をもとに, $1 \leq i \leq b$ に対し重み L^i を与える. ただし, 確率積分の項は定義に基づき離散近似をする. そこで濾波推定値を次の式で求める.

$$E[\mathbf{p}_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_{t_{k+1}}^I] = \frac{\sum_{i=1}^b L^i \tilde{\mathbf{p}}_{t_{k+1}}^i}{\sum_{i=1}^b L^i}.$$

更に濾波粒子 $\mathbf{p}_{t_{k+1}}^i = (\mathbf{p}_{t_{k+1}}^{i,1}, \dots, \mathbf{p}_{t_{k+1}}^{i,b})$ を次の式に基づき生成する.

$$\mathbf{p}_{t_{k+1}}^i = E[\mathbf{p}_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_{t_{k+1}}^I] + \sqrt{V_{t_{k+1}}} \boldsymbol{\varsigma}_i.$$

ただし, $\boldsymbol{\varsigma}_i$ は $N(0, I_K)$ に従う K 次元白色ノイズベクトルであり, 濾波推定誤差共分散行列 V_{t_k} は次の式を満たすものとする.

$$V_{t_k} = \frac{\sum_{i=1}^b L^i \mathbf{X}_{t_{k+1}}^i \mathbf{X}_{t_{k+1}}^{i\top}}{\sum_{i=1}^b L^i}.$$

ここで $\mathbf{X}_{t_{k+1}}^i = \mathbf{p}_{t_{k+1}}^i - E[\mathbf{p}_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_{t_{k+1}}^I]$ である.

4. (観測更新ステップ, default) $(t_k, t_{k+1}]$ の間にデフォルトが起これば, $\tilde{L}^i = L^i \lambda_\xi(\mathbf{p}^i)$ としてステップ 3 と同様に計算する. ただし, ξ はデフォルトした参照体とする.

注意 1 ここではファクタ過程のフィルタが $\sum_{i=1}^K E[\mathbf{p}^i|\mathcal{F}_t^I] = 1$ を満たすように $E[\mathbf{p}^K|\mathcal{F}_t^I] = 1 - \sum_{i=1}^{K-1} E[\mathbf{p}^i|\mathcal{F}_t^I]$ とする.

Table 1: Parameters

Parameters	Value
満期	$T = 5(\text{年})$.
ファクタの次元	$K = 4$.
参照体数	$m = 100$.
観測ノイズ	$\sigma_\epsilon = 0.1, \text{ or } 0.3$.

5 数値例

ここでは観測過程 Z の次元を一次元とし、ファクタ過程の誤差を含んだパラメータと、時間の離散化の幅の大きさが推定値に与える影響を考察する。また [7] に従い観測ノイズを定数 σ_ϵ を用いて $v = \sigma_\epsilon \sqrt{\Delta}$ と設定し、ファクタの初期値は既知としている。各パラメータを Table 1 で与える。次にマルコフ連鎖の生成行列を次の行列で与える。

$$Q^\Psi = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

誤差を含んだ生成行列については、生成行列の定義を満たすような次の行列を用いる。

$$\hat{Q}^\Psi = \begin{bmatrix} -0.5 - \epsilon_q & 0.5 + \epsilon_q & 0 & 0 \\ 0.2 + \epsilon_q & -0.5 - 2\epsilon_q & 0.3 + \epsilon_q & 0 \\ 0 & 0.3 + \epsilon_q & -0.5 - 2\epsilon_q & 0.2 + \epsilon_q \\ 0 & 0 & 0.5 + \epsilon_q & -0.5 - \epsilon_q \end{bmatrix}.$$

また誤差を含んだデフォルト強度のパラメータは、誤差を ϵ_v として $v'_i(k) = v_i(k) + \epsilon_v$ として表す。更にフィルタリグの推定誤差を評価する尺度として平均二乗誤差を用い、次の式で表す。

$$MSE_s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\lambda(\mathbf{p}_{t_k}) - \hat{\pi}_t \lambda)^2, \quad MSE_e = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\pi_t \lambda - \hat{\pi}_t \lambda)^2, \quad MSE_\Delta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\pi_t \lambda - \pi_t \lambda^\Delta)^2.$$

ただし、 $n = \frac{T}{\Delta}$ であり $\pi_t \lambda^\Delta$ は時間の刻み幅を Δ とした $\pi_t \lambda$ の数値解とする。

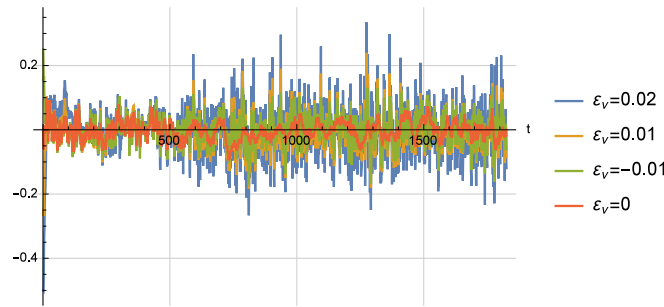


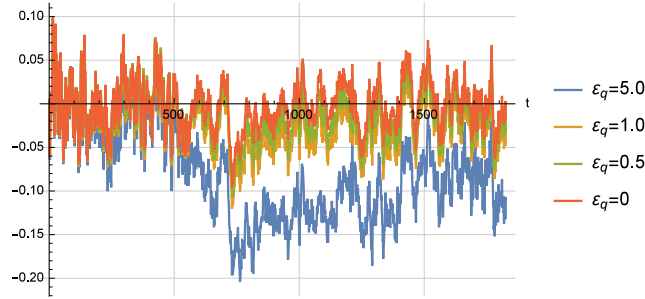
Figure 1: デフォルト強度の推定誤差の割合 $\frac{\lambda_i(\mathbf{p}_t) - E[\lambda_i(\mathbf{p}_t)|\mathcal{F}_t]}{\lambda_i(\mathbf{p}_t)}$. v のみに誤差が含まれている場合. $\sigma = 0.3, \Delta = 1/365, \epsilon_q = 0$.

6 結論と今後の展開

デフォルト強度のパラメータ $v_i(k)$ の誤差が大きくなれば、Figure 1,2 で示した通り観測ノイズを上手く処理できず推定誤差が大きくなるが、軌道がシグナルから逸れる傾向は見受けられなかった。生成行列に誤差を含んだ場合は、誤差が大きくなるにつれ推定値がシグナルから離れていくことが Figure 2 から確

Table 2: ϵ_v に対する MSE .

ϵ_v	MSE_s	MSE_e
-0.01	1.6×10^{-2}	9.3×10^{-3}
-0.005	1.0×10^{-2}	3.9×10^{-3}
0	6.7×10^{-3}	0
0.005	1.2×10^{-2}	5.0×10^{-3}
0.01	2.0×10^{-2}	1.3×10^{-2}
0.02	4.8×10^{-2}	4.1×10^{-2}

Figure 2: デフォルト強度の推定誤差の割合 $\frac{\lambda_t(\mathbf{p}_t) - E[\lambda_t(\hat{\mathbf{p}}_t) | \mathcal{F}_t^I]}{\lambda_t(\mathbf{p}_t)}$. Q^y のみに誤差が含まれている場合. $\sigma = 0.1, \Delta = 1/365, \epsilon_v = 0$.

認できる. これは生成行列に誤差が含むことにより, \mathbf{p}_t のドリフト部分の定常分布が変わることによって考えられる. またデフォルト強度のパラメータ $v_i(k)$ と生成行列 Q^y の両方に誤差を含んだ場合について Figure 3 で示したが, 大きく推定値がずれることは起こりづらいといえる. しかしながらファクタ過程 \mathbf{p} の推定は上手くできないことが现阶段で分かっている. MSE については Table 2,3 からほとんどの場合で $MSE_s > MSE_e$ となることが分かる. つまりファクタ過程のパラメータが誤差を含んだことにより, 推定値が $E[\hat{\lambda}_i(\hat{\mathbf{p}}_t) | \mathcal{F}_t^I]$ が $E[\lambda_i(\mathbf{p}_t) | \mathcal{F}_t^I]$ よりシグナルに近くなるといえる.

また時間の離散化が与える影響については, Figure 4 から MSE^Δ が Δ に関して一次関数的に上昇しているようにも感じられる. これは粒子フィルタのアルゴリズムで用いたオイラー・丸山近似における, 真値とその離散近似の二乗誤差の期待値が定数 C を用いて $E[\|X - X^\Delta\|^2] \leq C\Delta$ と表されることに依存していると考えられる.

本講演ではファクタ過程のパラメータが誤差を含む場合のデフォルト強度の MSE の期待値と, 時間の離散化が及ぼす影響についての不等式を用いた評価についても発表する予定である. またジャンプがない場合のファクタ過程は Wonham フィルタと呼ばれており, その MSE の期待値にパラメータの誤差が与える影響については, すでに Handel [9] 等で研究されている. 更にデフォルト強度の誤差が金融機関に及ぼす影響についても, 簡単な設定の下で解析的に与える.

References

- [1] 片山 徹, 非線形カルマンフィルタ, 朝倉書店, 2011.

Table 3: ϵ_v に対する MSE .

ϵ_v	MSE_s	MSE_e
0	6.7×10^{-3}	0
0.5	8.0×10^{-3}	9.2×10^{-4}
1	1.0×10^{-2}	3.2×10^{-3}
5	5.3×10^{-2}	4.4×10^{-2}
20	2.9×10^{-1}	2.8×10^{-1}

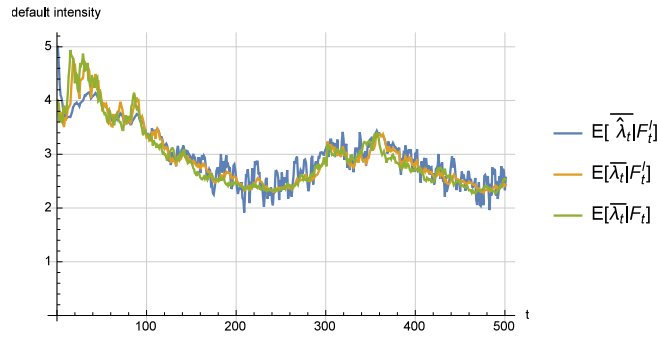


Figure 3: ν と Q_Ψ の両方に誤差が入った場合のデフォルト強度. $\epsilon_\nu = 0.01, \epsilon_q = 1, \sigma = 0.3, \Delta = 1/100$.

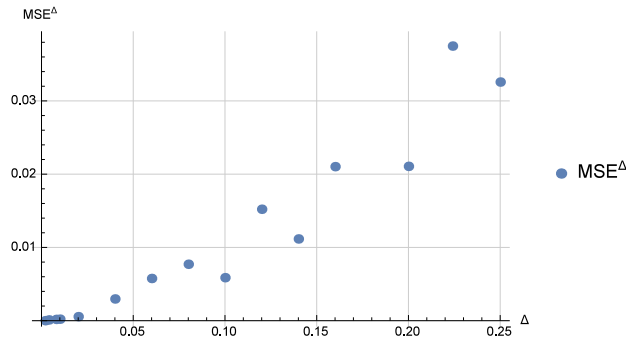


Figure 4: 時間の離散化幅 Δ の変化による MSE^Δ . ただし $\pi_t \lambda$ は真値が求まらないので $\pi_t \lambda = \pi_t \lambda^{0.002}$ とする. また $0.002 \leq \Delta \leq 0.25$.

- [2] フィリップ・J・シェーンブッハー, クレジットデリバティブ [モデルと価格評価], 東洋経済新報社, 2005.
- [3] G. Marion, X. Mao, E. Renshaw, *Convergence of the Euler Scheme for a Class of Stochastic Differential Equation*, Department of Statistics and Modelling Science, University of Strathclyde.
- [4] H. Hebiguchi, K. Yasuda *Effects on Hedging Errors of First-to-Default Swap from Parameter Estimation Errors*, Proceedings of the 47th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (electronic proceedings).
- [5] R. Frey, A. Gabih, R. Wunderlich *Portfolio optimization under partial information expert opinions: a dynamic programming approach*, Communications in Stochastic Analysis, 8 (1), 49-79, 2014
- [6] R. Frey, T. Schmidt, *Pricing and hedging of credit derivatives via the innovations approach to nonlinear filtering*, Finance and Stochastics, Vol.16, No.1, pp.105 -133, 2011.
- [7] R. Frey, W. Runggaldier, *Pricing credit derivatives under incomplete information: a nonlinear-filtering approach*, Finance and Stochastics, Vol.14, No.4, pp.495 - 526, 2010.
- [8] R. j. Elliot, L. Aggoun, J. B. Moore. *Hidden Markov Models Estimation and Control*, Springer, 1997.
- [9] R. van Handel, *Filtering, Stability, and Robustness*, Finance and Stochastics, In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy.
- [10] S.E. シュリーブ, ファイナンスのための確率解析 II, 丸善出版, 2012.
- [11] T. R. Bielecki, M. Jeanblanc and M. Rutkowski, *Hedging of basket credit derivatives in credit default swap market*, Journal of Credit Risk, Vol. 3, No. 1, pp.91-132, 2007.
- [12] T. R. Bielecki, M. Jeanblanc and M. Rutkowski, *Credit Risk Modeling*, Osaka University Press, 2009.

- [13] U. Cherubini, F. Gobbi, S. Mulinacci and S. Romagnoli, *Dynamic Copula Methods in Finance*, Wiley, 2012.