CKLS モデルにおけるパラメータ推定手法の比較

茶木　直人
法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻

1. はじめに

現在金融市場では, 金融派生商品は重要な役割を担っており, それにあわせて金融派生商品の一種であるオプションの価格付けに関して非常に多く研究されている. 数理ファイナンスの分野において, オプションの価格付けを行う際には, 株価などの価格過程は確率微分方程式により表されることが多い. 価格の過程である確率微分方程式の未知のパラメータを現実のデータを用いて推定する必要がある. そのため, 本研究では, 確率微分方程式のパラメータの推定方法や, 推定方法の違いによる推定結果の違いの比較を行っていく. 本稿では, 考える確率微分方程式として, Chan K. Ceajer, George A. Karolyi, Francis. A. Longstaff, Anthony B. Sanders(CKLS) モデルの一種である Ornstein-Uhlenbeck(OU) 過程の場合を考える. 以下確率解析や数理ファイナンスについては [2] や [3] を参照していただきたい.

2. 推定を行う確率微分方程式

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$ をフィルトレーション付き完備確率空間とする. ただし, $\mathcal{F}_t$ は usual condition を満たすとする. ここで OU 過程は, 以下のように表される確率微分方程式である.

$$dX_t = \alpha(\nu - X_t)dt + \beta dW_t. \tag{1}$$

また, $\nu = 0$ とした

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dW_t \tag{2}$$

の二つの式に対しての推定を行う. ただし, ν は実数, $\alpha, \beta > 0$ とし, W_t はブラウン運動である. OU 過程は, 回帰度 α, 回帰レベル ν を持つ自己回帰なガウス過程であり, 式 (1) の解は, $X_0 = x_0$ として,

$$X_t = e^{-\alpha t}\left(x_0 + \int_0^t e^{\alpha s}\alpha\nu ds + \int_0^t e^{\alpha s}\beta dw_s\right),$$

である. X_t の分布は平均, 分散が以下のような正規分布となる.

$$E[X_t] = \mu_t = e^{-\alpha t}x_0 + \nu(1 - e^{-\alpha t}),$$
$$V(X_t) = v_t = \frac{\beta^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

3. パラメータ推定手法の紹介

本節では, 確率微分方程式のパラメータ推定を行う手法の紹介をする.

3.1　2 Statistics model による推定

この節の手法は [7] で与えられ, 式 (2) に対するパラメータの推定手法となる.

前節で述べたことから, 式 (2) における X_t の分布は, $\mathcal{N}(e^{-\alpha t}x_0, \frac{\beta^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}))$ である. この手法において, データ数 n, データ取得の時間幅 Δt, 満期が $n\Delta t$ として, $n \to \infty$ としたときに $\Delta t \to 0$, $n\Delta t \to \infty$ を満たすような状況の下で考える. このとき OU 過程の分散は $V_\infty = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ となる. S が可測な実数の集合である時, $Y_t^S = \mathbf{1}_{X_t \in S}$

と定義する．$\mathbf{1}_A$ は, 集合 A に対する定義関数である．今回は [7] で与えられている通り $S = [1, \infty[$ で考え, Occupation time statistic を次のように定義する．$n \in \mathcal{N}$ に対して,

$$OT_n^S = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{k\Delta n}^S = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_{k\Delta n} \in S}.$$

OT_n^S は X_t がデータ数 n のうち, 何回 S に含まれる値となったかを計測する統計量である．この OT_n^S は $S = [1, \infty[$ のとき, 次のように 2 次平均収束することが [7] の Theorem 2.2 で示されている．

$$OT_n^S = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_{k\Delta n} \in S} \xrightarrow{L^2} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi V_\infty}} e^{-\frac{x^2}{2V_\infty}} dx. \tag{3}$$

次に, Crossing statistic を次のように定義する．

$$C_n^S = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{Y_{k\Delta n}^S \neq Y_{(k+1)\Delta n}^S}.$$

C_n^S は, X_t が, 1 を跨いだ回数を測るものである．C_n は, $n\Delta_n^{\frac{3}{2}} \to +\infty$ と仮定したとき, 以下のように 2 次平均収束することが [7] の Theorem 3.1 で示されている．

$$\frac{C_n^S}{\sqrt{\Delta n}} \xrightarrow{L^2} \frac{2\beta}{\sqrt{2\pi}} f_{V_\infty}(1). \tag{4}$$

このとき $f_{V_\infty}(x)$ は, 平均 0, 分散 V_∞ の正規分布の密度関数

$$f_{V_\infty}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V_\infty}} e^{-\frac{x^2}{2V_\infty}},$$

である．得られたデータから OT_n^S を求め, 式 (3) より, V_∞ を推定し, 推定した V_∞ と式 (4) により, パラメータ β の推定を行い．得られた β, V_∞ を, OU 過程の分散 $V_\infty = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ に代入し, 推定値 α を求める．

3.2 最尤推定法

式 (1) の OU 過程に対して [8] による, 最尤推定法について述べる．OU 過程の増分 $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ の密度関数は, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, $(t_{i-1} < t_i)$ を用いて以下のように表せる．

$$f(x_{t_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_{\Delta t}}} \exp\Big[-\frac{(x_{t_i} - \nu - (x_{t_{i-1}} - \nu)e^{-\alpha\Delta t})^2}{\frac{\beta^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}\Big].$$

このとき, 対数尤度関数は以下のようになる．

$$\begin{aligned} LL(\alpha, \nu, \beta) = -\frac{n}{2}\log\left[\frac{\beta^2}{2\alpha}\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \log\big[1 - e^{-2\alpha\Delta t}\big] \\ - \frac{\alpha}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{t_i} - \nu - (x_{t_{i-1}} - \nu)e^{-\alpha\Delta t})^2}{1 - e^{-2\alpha\Delta t}}. \end{aligned} \tag{5}$$

対数尤度関数を ν, β でそれぞれ偏微分し,

$$\frac{\partial LL(\alpha, \nu, \beta)}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial LL(\alpha, \nu, \beta)}{\partial \beta} = 0,$$

となる ν, β を求める.

$$\nu = g(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}} e^{-\alpha\Delta t}}{1 + e^{-\alpha\Delta t}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1 - e^{-\alpha\Delta t}}{1 + e^{-\alpha\Delta t}} \Big)^{-1},$$

$$\beta = h(\alpha, g(\alpha)) := \sqrt{\frac{2\alpha}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_{t_i} - (g(\alpha) + (X_{t_{i-1}} - g(\alpha))) e^{-\alpha\Delta t})^2}{1 - e^{-2\alpha\Delta t}}}.$$

この偏微分により ν が α の 1 変数関数としてあらわすことができ, その ν を用いることで β もまた, α の関数としてあらわすことができる. この ν, β を対数尤度関数に代入し,

$$\max_{\alpha} LL(\alpha, g(\alpha), h(\alpha, g(\alpha))),$$

となる推定値 α を求める. この推定値 α を $g(\alpha), h(\alpha, g(\alpha))$ に代入し, ν, β の推定値を得る. またこの手法は式 (2) に対しても適用できる.

3.3 擬似最尤推定法

擬似最尤推定法は, 観測したデータの確率分布が未知であるときに, 適当な分布を仮定して擬似対数尤度関数 $QL(x, \theta)$ を定義してパラメータの推定を行う手法であり, この手法は前述の 2 つの手法と異なり, 観測データを OU 過程以外の確率過程を考えた際にも適用できるため推定のための確率微分方程式を一般形にして推定手法の紹介をしていく. 一般形で表した確率微分方程式を次のように表す.

$$dX_t = b(\alpha, X_t)dt + \sigma(\beta, X_t)dW_t. \tag{6}$$

ここで, $b(\alpha, x)$, $\sigma(\beta, x)$ は所与の可測関数である. また, 式 (6) の解は存在するとする. このとき, 式 (6) における擬似対数尤度関数 $\mathrm{QL}(x, \theta)$ は, $\theta = (\alpha, \beta)$ として, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} QL(\mathcal{X}_t, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big\{ & \log\{\sigma(\beta, X_{t_{i-1}})\}^2 \\ & + \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\sigma(\beta, X_{t_{i-1}})^2} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - \Delta t b(\alpha, X_{t_{i-1}}))^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{7}$$

ただし, $\mathcal{X}_t = (X_{t_0}, X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ とする. この手法における推定値を $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ とすると, 推定値は

$$\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \arg\max_{\theta} QL(X_t, \theta)$$

のように求める.

3.4 Adaptive Bayes estimation

[5] より, 式 (6) における Adaptive Bayes 推定では擬似対数尤度関数を用いて, 以下の式によりパラメータ推定をする. 擬似対数尤度関数は, 式 (7) を用いる. Θ_2 は推定値 $\hat{\beta}$ を含む有界な実数の閉集合である. 任意の $\beta' \in \Theta_2$ を用いて推定値である $\hat{\alpha}$ を求める.

$$\hat{\alpha} = \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp\{QL(X_t, \alpha, \beta')\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp\{QL(X_t, \alpha, \beta')\} \pi_1(\alpha) d\alpha}.$$

ただし, 事前分布 $\pi_1(\cdot)$ は一様分布を用いて推定を行う. また, Θ_1 は推定値 $\hat{\alpha}$ を含む有界な実数の閉集合である. この推定値 $\hat{\alpha}$ を用いて, β の推定値 $\hat{\beta}$ を次のように定義する.

$$\hat{\beta} = \frac{\int_{\Theta_2} \alpha \exp\{QL(X_t, \hat{\alpha}, \beta)\}\pi_2(\beta)d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp\{QL(X_t, \hat{\alpha}, \beta)\}\pi_2(\beta)d\beta}.$$

ただし, $\hat{\alpha}$ のときと同様に事前分布 $\pi_2(\cdot)$, も一様分布を用いて推定を行う.

3.5 Adaptive LASSO -TYPE estimation

式 (6) に対する Adaptive LASSO -TYPE estimation による推定は, 推定値を $\theta' = (\alpha', \theta')$ として, [4] を用いると,

$$\theta' = (\alpha', \beta') = \arg\max_{\theta} F(X_t, \theta) \tag{8}$$

のように推定値を求められる. ただし,

$$F(\mathcal{X}_t, \theta) := (\theta - \tilde{\theta})' \ddot{QL}(\mathcal{X}_t, \tilde{\theta})(\theta - \tilde{\theta}) + \lambda_0|\alpha||\tilde{\alpha}|^{-\delta_1} + \gamma_0|\beta||\tilde{\beta}|^{-\delta_2}$$

であり, $\tilde{\theta}$ は 3.3 節の擬似最尤推定法による推定値, $\ddot{QL}(x, \theta)$ は QL の θ に関するヘッセ行列である. また, データ数 n を $n \to \infty$ とするとき

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{n\Delta t}} \to 0, \quad (n\Delta t)^{\frac{\delta_1 - 1}{2}}\lambda_0 \to \infty, \quad \frac{\gamma_0}{\sqrt{n}} \to 0, \quad n^{\frac{\delta_2 - 1}{2}}\gamma_0 \to \infty,$$

を満たすものとする. 本研究では $\lambda_0 = \gamma_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 2$ としてシミュレーションを行う.

3.6 一般化モーメント法

[1] を参考に一般化モーメント法の推定について紹介する. 式 (1) をオイラー・丸山近似により, 離散化すると

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \alpha(\nu - X_{t_{i-1}})\Delta t + \beta(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

となる. ここで, $\beta(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ は 平均 0, 分散 $\beta^2\Delta t$ の正規分布なので,

$$X_{t_i} - X_{t-i-1} = \alpha(\nu - X_{t_{i-1}})\Delta t + \varepsilon_t, \tag{9}$$

$$\varepsilon_t^2 = \beta^2\Delta t + \eta_t, \tag{10}$$

と表すことができる. ここで ε_t と η_t は誤差項である. ここで, [6] により確率微分方程式に対する一般化モーメント法の直交条件は, 式 (9), 式 (10) を用いて,

$$h_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t X_{t-\Delta t} \\ \eta_t \\ \eta_t X_{t-\Delta t} \end{bmatrix} \tag{11}$$

について, $E[h_t(\theta)] = 0$ とすることで 4 次元の直交条件を得る. シミュレーションにおいては直交条件は以下のように得る.

$$g_T(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_t(\theta).$$

この直交条件により, 一般化モーメント法は,

$$J_T(\theta) = g_T(\theta)^T K_T g_T(\theta) \tag{12}$$

となる $J_T(\theta)$ を最小化する $\hat{\theta}$ が一般化モーメント法による推定値となる. ここで K_T は最適なウエイトを与える行列である. ウエイト行列は, パラメータ θ により $h(\theta)$ を用いて以下のように求めることが出来る,

$$S_T(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(\theta)h(\theta)^T, \tag{13}$$

として, この $S_T(\theta)$ を用いて,

$$K_T = S_T(\theta_0)^{-1} \tag{14}$$

と与えられる. ただし, 推定以前にパラメータを得ることはできないため, ウエイト関数は直接計算は出来ない. なので, 一般化モーメント法では上述の式と, 以下に記す繰り返し計算を行うことでパラメータの推定を行う.
1) ウエイト行列を単位行列 I と仮定して, 式 (12) より推定値 $\hat{\theta}'$ を求める.
2) 求めた推定値 $\hat{\theta}'$ を式 (13), 式 (14) に代入し, 新たなウエイト行列を計算する.
3) 新たなウエイト行列を, 式 (12) に代入し, 推定値 $\hat{\theta}"$ を求める.
4) 手順 2), 3) を, 推定値 $\hat{\theta}$ が収束するまで繰り返す.

4. 数値実験と結果

確率微分方程式の近似はオイラー・丸山近似を用いて, $n = 10 \cdot 2^i$, $\Delta t = 0.1 \cdot 2^{\frac{i}{2}}$ としてシミュレーションし, データを得る.

4.1 式 (2) に対する推定

式 (2) に対して各パラメータに数値を設定し, 少ないデータ数で推定した際の各推定手法の結果を比較する. 基準となる OU 過程について各パラメータを $x_0 = 0.3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $i = 4, 10$ と設定する.

以下の表 1 の上段は, データ数 $n = 160$ とした, 少ないデータの下での推定である. 下段はデータ数 $n = 10240$ とした時の推定結果である. また, 各手法の推定値はシミュレーションを 1000 回行った際の平均値とし, 括弧内の数字は推定値の分散を表している.

表 1 にまとめた計算結果より, データ数の少ないうちは, Adaptive lasso 推定や, 一般化モーメント法による推定の精度が他の手法に比べ真値に近い推定値を示すことがわかる. 2 statistic model による推定値の平均値や, 分散が大きくなるのは, データ数が少ないサンプルでの推定だと $S = [1, \infty[$ としたとき, 1 度もサンプルデータが 1 を超えないことがあり, そのとき α, β 共に推定値は 0 となる. また, 到達した回数が 1 度や, 2 度だけなど非常に少ない場合は, α の推定値が真値よりもはるかに大きい値をとることがある. そのことから, 他の手法より分散の値が大きくなっている.

また, データ数が多い時は, 各手法の α, β の推定値に大きな差はなく, どの手法においても真値である $\alpha = 1$, $\beta = 1$ に近い値をとっていることがわかる. 各推定値の分散は, 小さいものとなっていて, 安定して推定値を得ることが出来る. シミュレーションを行う上での各手法の優劣でいえば, 計算コストがあげられる. 2 statistic model や, 最尤推定法は, 最適化計算や反復計算を行わないため, 計算時間はデータ数が増加してもそう長くはならない. 逆に, 最適化や反復計算を行う手法は時間がかかりやすい傾向にある.

表 1:

	α	β
真値	1.0	1.0
$i = 4$ のとき		
2 statistics model	3.336	1.201
	(30.292)	(1.457)
最尤推定法	1.485	0.857
	(1.919)	(0.079)
擬似最尤推定法	1.512	0.996
	(1.324)	(0.003)
A Bayes estimation	1.342	0.996
	(1.289)	(0.004)
A LASSO -TYPE estimation	1.273	0.993
	(1.368)	(0.004)
一般化モーメント法	1.475	0.976
	(1.2672)	(0.004)
$i = 10$ のとき		
2 statistics model	1.122	1.029
	(0.209)	(0.034)
最尤推定法	1.018	1.000
	(0.021)	(0.0001)
擬似最尤推定法	1.068	0.999
	(0.078)	(0.0001)
A Bayes estimation	1.153	1.004
	(0.0733)	(0.0001)
A LASSO -TYPE estimation	0.909	1.009
	(0.078)	(0.007)
一般化モーメント法	1.067	0.999
	(0.078)	(0.0001)

4.2 式 (1) に対する推定

式 (1) に対して各パラメータに数値を設定し, 各推定手法の結果を比較する. 基準となる OU 過程について各パラメータを $x_0 = 0.3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\nu = 1$, $i = 4, 10$ と設定する.

表 2 にまとめた計算結果より, データ数の少ないうちは, すべての手法で, ν, β の推定値は高い精度での推定が可能になっている. ただし, 最尤推定法に関しては ν の推定値のばらつきが大きいため, その点について他の手法よりも精度が低いと言える. α の推定値がどの手法においても誤差が大きくなる傾向にあり, データが満足に得られない時には α の正確な推定は困難であると言える.

データ数が多い時は, α, ν, β の推定値の平均は真値に近い値を取っている. 各推定値の分散は, 小さいものとなっていて, 安定して推定値を得ることが出来る. ただし, 推定するパラメータが増えたため, 計算時間も長くなりやすい傾向にある. そのため式 (1) に関する推定を行うとき, データ数が多いときは最尤推定法が適していると言える.

表 2:

	α	ν	β
真値	1.0	1.0	1.0
$i=4$ のとき			
最尤推定法	2.068	1.206	1.038
	(2.987)	(3.659)	(0.151)
擬似最尤推定法	2.176	1.027	0.991
	(3.035)	(0.623)	(0.003)
A Bayes estimation	2.102	0.981	0.982
	(2.974)	(0.549)	(0.005)
A LASSO -TYPE estimation	2.025	0.962	0.987
	(2.882)	(0.479)	(0.005)
一般化モーメント法	2.163	1.047	0.980
	(3.022)	(0.794)	(0.004)
$i=10$ のとき			
最尤推定法	1.134	1.099	1.001
	(0.103)	(0.747)	(0.0001)
擬似最尤推定法	1.134	0.997	0.999
	(0.098)	(0.031)	(0.0001)
A Bayes estimation	1.117	1.093	0.999
	(0.092)	(0.032)	(0.0001)
A LASSO -TYPE estimation	1.105	0.981	0.999
	(0.095)	(0.033)	(0.0001)
一般化モーメント法	1.133	0.997	0.999
	(0.098)	(0.031)	(0.0001)

公演では CKLS モデルの一般の場合の結果も紹介する.

参考文献

[1] 乾孝治, 室町幸雄 金融モデルにおける推定と最適化, 朝倉書店, 2013

[2] スティーヴン E. シュリーヴ, ファイナンスのための確率解析 II, 丸善出版, 2012

[3] トーマス・ミコシュ, ファイナンスのための確率微分方程式 ブラック=ショールズ公式入門, 東京電機大学出版局, 2000

[4] Alessandro De Gregorio, Stefano M. Iacus, *Adaptive Lasso-type estimation for multivariate diffusion processes*, Econometric Theory, 28, (2012), pp. 838-860.

[5] Alexandre Brouste, Hideitsu Hino, Hiroki Masuda, Kengo Kamatani, Masaaki Fukasawa, Masayuki Uchida, Nakahiro Yoshida, Ryosuke Nomura, Stefano M. Iacus, Yasutaka Shimizu, Yuta Koike,*The YUIMA Project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations,* Journal of Statistical Software，vol 57, Issue4 (2014).

[6] Chan K. Ceajer, George A. Karolyi, Francis. A. Longstaff, Anthony B. Sanders,*An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate*, The Journal of Finance, 47(3), (1992) , pp. 1209-1227.

[7] Emmanuel Gobet, Gustaw Matulewicz, *Parameter estimation of Ornstein-Uhlenbeck process generating a stochastic graph*, preprint,(2016)

[8] Jose Carlos Garcia Franco, Maximum likelihood estimation of mean reverting processes , http://www.investmentscience.com /Content/howtoArticles / MLE_ for_ OR_ mean_ reverting.pdf, preprint