

Heston モデルに対する Robbins-Monro 法を用いたリスク測度計算

若林 昌平 (Shouhei WAKABAYASHI)

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻

1. はじめに

1980 年以降, 国際金融市場は飛躍的に拡大したが, 増加するデリバティブ取引のリスク管理が問題となっていた. この頃から, 金融機関におけるリスク管理の重要性を認識し BIS 規制が導入された.

金融リスクには信用リスク, 市場リスク, 流動性リスクなど様々なリスクがあるが, 本研究では株価の変動による価値の減少を市場リスクとみなし考察していく. 市場リスクの尺度の 1 つとしてバリュアットリスク (VaR) というリスク測度を用いていく. VaR は金融機関, 特に銀行がリスク管理の重要な道具として幅広く利用している. もう 1 つのリスク測度として, コヒーレントリスク測度の 1 つである条件付きバリュアットリスク (CVaR) を本研究では扱う. さらに, 金融機関は投資やポートフォリオによるリスク (VaR と CVaR) をより早く正確に知りたいので効率的に求める必要性がある.

前述の通り本研究ではリスク量として VaR と CVaR を対象とし, 確率的ボラティリティモデルである Heston モデルに Bardou et al. [2] で提案されている確率的勾配降下法の 1 つである Robbins-Monro(RM) 法を用いて数値実験した結果を紹介する. RM 法と分散減少法を用いた改良 RM 法, モンテカルロ法の 3 つの手法を扱い, ここではより多くの試行回数を行った改良 RM 法で求めた VaR と CVaR を基準値とし, どの手法が効率的に近似値を求めることができるかを考察していく. また VaR と CVaR の基準値を求める際, それぞれの真値と比較してどの程度誤差があるかを Bikelis の定理を適用した不等式を用いて評価していく.

2. リスク量

本研究で扱う 2 つのリスク量を与える. (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする. $\alpha \in (0, 1)$ とし, VaR は確率 $1 - \alpha$ (α は信頼水準と呼ばれ, $\alpha = 0.01, 0.05$ などの値を用いる.) で VaR をこえる損失のうちの最小損失額のことであり, 次のように定義する. 確率変数 S は $E[|S|] < \infty$ を満たすものとする.

定義 2.1 信頼水準 α のバリュアットリスク VaR_α は,

$$VaR_\alpha := \inf\{\xi \in \mathbb{R} | P(S \leq \xi) \geq \alpha\},$$

で与えられる. S は株価の T 年間での変化量を表す確率変数とする.

次に CVaR を定義する. CVaR とは VaR をこえる損失額の期待値のことである.

定義 2.2 信頼水準 α の条件付きバリュアットリスク $CVaR_\alpha$ は,

$$CVaR_\alpha := E[S | S \geq VaR_\alpha],$$

で与えられる.

3. リスク量の計算手法

3.1 リスク量の期待値表現

VaR と CVaR の期待値を用いた表現を与える. 期待値で表現することで, RM 法を用いることができるようになる. V を, 次のように定義する.

$$V(\xi) := E[v(\xi, S)]. \quad (1)$$

ただし, $v(\xi, x) := \xi + \frac{1}{1-\alpha}(x - \xi)_+$ とし, $(x - \xi)_+$ は $x - \xi$ の positive part を表す. ここで, VaR は

$$VaR_\alpha = \arg \min_{\xi \in \mathbb{R}} V(\xi) = \{\xi \in \mathbb{R} | V'(\xi) = 0\} = \{\xi \in \mathbb{R} | P(S \leq \xi) = \alpha\},$$

で, CVaR は $\xi_\alpha^* = VaR_\alpha$ とすると,

$$CVaR_\alpha = V(\xi_\alpha^*), \quad (2)$$

で求まることが Baudou et al. [2] の Proposition 2. 1 で示されている.

3.2 Robbins-Monro 法

[2] の pp. 179~183 で紹介されている, RM 法を用いた VaR, CVaR の求め方を紹介する.

$$H_1(\xi, s) := \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, s) = 1 - \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{1}_{\{s \geq \xi\}},$$

と定義すると, $V'(\xi) = E[H_1(\xi, S)]$ となる. ここで, $E[H_1(\xi, S)] = 0$ となる ξ を探すため, 確率的勾配降下法の 1 つである RM アルゴリズムを用いる. そのアルゴリズムは次のように与えられる. S_n を S の独立同分布なサンプルとすると, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\xi_n = \xi_{n-1} - \gamma_n H_1(\xi_{n-1}, S_n), \xi_0 \in L^1(P). \quad (3)$$

このとき, S を連続分布を持つ確率変数と仮定し, 数列 γ_n が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty, \quad (4)$$

の 2 つの仮定を満たすと, (3) の ξ_n は VaR_α に概収束することが Baudou et al. [2] の Theorem 2. 2. で示されている. 本研究では, Heston モデルに従う株価の変化量 S_n はオイラー・丸山近似を用いて求める. 詳しくは 4.2. 節で述べる.

次に, CVaR は (1), (2) より

$$CVaR_\alpha = V(\xi_\alpha^*) = E[v(\xi_\alpha^*, S)]$$

で与えられる. この期待値を解析的に求めることは困難であるため, 以下の式で与えられるモンテカルロ法 (MC) で近似値を求める. $C_0 = 0$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k, S_{k+1}) \approx E[v(\xi_\alpha^*, S)], \quad (5)$$

とする. MC とは確率論の用語で言うと大数の法則のことで, (5) の試行回数 n を $n \rightarrow \infty$ とすると $v(\xi, S)$ の母平均に概収束するという定理である. (3) と (5) で VaR

と CVaR を同時に求めることができる. ここで, $H_2(\xi, c, s) := c - v(\xi, s)$ とすると, 再帰的に

$$C_n = C_{n-1} - \frac{1}{n} H_2(\xi_{n-1}, C_{n-1}, S_n), \quad (6)$$

と (3.5) を書き直すことができる. そして, (3.6) で $\frac{1}{n}$ の代わりに (3.4) を満たす数列 β_n にすると, VaR と CVaR を求めるアルゴリズムは, $n \geq 1$ に対して

$$\begin{cases} \xi_n = \xi_{n-1} - \gamma_n H_1(\xi_{n-1}, S_n), \\ C_n = C_{n-1} - \beta_n H_2(\xi_{n-1}, C_{n-1}, S_n), \end{cases} \quad (7)$$

と表せ, S を連続分布を持つ確率変数とし, γ_n, β_n に対して (3.4) の 2 つの仮定の下で概収束することが Baudou et al. [2] の section 2. 2. で示されている.

3.3 改良 Robbins-Monro 法

Baudou et al. [2] の pp. 183~184 で紹介されている改良 RM 法を用いた VaR, CVaR の求め方を紹介する.

改良 RM 法は分散減少法によって, RM 法より効率的に VaR と CVaR を求めることが期待されて導入されている. (3.7) に Cesaro mean を適用することで, 平均化され, シミュレーションの分散がおさえられる. アルゴリズムは

$$\begin{cases} \bar{\xi}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = \bar{\xi}_{n-1} - \frac{1}{n} (\bar{\xi}_{n-1} - \xi_n), \\ \bar{C}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_k = \bar{C}_{n-1} - \frac{1}{n} (\bar{C}_{n-1} - C_n), \end{cases}$$

となり, (3.7) の $\beta_n = \frac{\beta_1}{n^a}, \gamma_n = \frac{\gamma_1}{n^a}$ が $\beta_1 > 0, \gamma_1 > 0, \frac{1}{2} < a < 1$ の下で概収束することが Baudou et al. [2] の Theorem 2. 3. で示されている.

4. Heston モデル

4.1 Heston モデル

Heston モデルとは Heston [5] で導入された株価モデルで, 以下の確率微分方程式で株価を記述するモデルである.

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{\sigma(t)} S(t) dW(t), \\ d\sigma(t) = \eta(\theta - \sigma(t))dt + \kappa \sqrt{\sigma(t)} d\tilde{W}(t), \\ dW(t)d\tilde{W}(t) = \rho dt. \end{cases} \quad (8)$$

ここで, $S(t)$ は時刻 t での株価, $\sigma(t)$ は確率的ボラティリティと呼ばれ時刻 t でのボラティリティを表す. $W(t), \tilde{W}(t)$ はブラウン運動とする. $S(0)$ は初期株価, μ は期待成長率, η はボラティリティの回帰度, θ はボラティリティの回帰レベル, κ はボラティリティのボラティリティ, ρ は $W(t), \tilde{W}(t)$ 間の相関係数ですべて定数である. ここで, ブラウン運動とは独立増分を持つ平均 0, 分散 t の連続なガウス過程である. 確率解析に関する詳細はシュリーヴ [1] を参照してほしい. Heston モデルは, ボラティリティが確率的に変動するモデルであるので, ボラティリティを定数とするブラック・ショールズモデルと比べると実際の市場に近い株価のモデルである. しかし, 満期 T での株価の分布がわからないので近似手法を用いて満期 T での株価のサンプルを得る必要がある.

4.2 オイラー・丸山近似

オイラー・丸山近似とは区間 $[0, T]$ の分割を

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T$$

と N 分割して、満期 T での確率微分方程式の近似値を算出する方法である。本研究では、(8) の $S(t)$ と $\sigma(t)$ の2つの確率微分方程式に適用することで満期 T での株価の近似値を求める。[7] を参考に、オイラー・丸山近似のアルゴリズムを紹介する。初期値 $X_0^{(n)} = X_0$ を決定し、以下のアルゴリズムを用いて満期 T での株価 $X_T^{(n)}$ の近似値を求める。

$$\begin{aligned} X_{t_1}^{(n)} &= X_0^{(n)} + a(X_0^{(n)})\Delta_1 + b(X_0^{(n)})\Delta_1 B, \\ X_{t_2}^{(n)} &= X_{t_1}^{(n)} + a(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 + b(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 B, \\ &\vdots \\ X_{t_{n-1}}^{(n)} &= X_{t_{n-2}}^{(n)} + a(X_{t_{n-2}}^{(n)})\Delta_{n-1} + b(X_{t_{n-2}}^{(n)})\Delta_{n-1} B, \\ X_T^{(n)} &= X_{t_{n-1}}^{(n)} + a(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n + b(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n B, \\ \Delta_i &= t_i - t_{i-1}, \Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

また、オイラー・丸山近似の分割数 n が ∞ のとき、確率微分方程式の解に収束する。

5. Bikelis の定理と誤差評価

[3] の Theorem. 3. 7 を参考に VaR と CVaR の基準値を求める際、それぞれの真値と比較してどの程度誤差があるかの誤差評価をする。ここでは Bikelis の定理を適用するので紹介していく。

定理 5.1 (Bikelis [4]) 任意の $l \in \mathbb{N}$ に対して、 $\zeta^{(l)}$ は $E[\zeta^{(l)}] = 0$ 、かつある $0 < \gamma \leq 1$ で $E[|\zeta^{(l)}|^{2+\gamma}]$ の独立な確率変数とする。 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq A \leq 1$ とし、 $M \in \mathbb{N}$ に対して

$$B_M := \sum_{l=1}^M \text{var}(\zeta^{(l)}), \Phi_M(x) := P\left(\frac{\zeta^{(1)} + \dots + \zeta^{(M)}}{\sqrt{B_M}} \leq x\right),$$

とすると、以下の不等式が成り立つ: $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|\Phi_M(x) - \Phi(x)| \leq \frac{A}{B_M^{1+\frac{\gamma}{2}}(1+|x|)^{2+\gamma}} \sum_{l=1}^M E[|\zeta^{(l)}|^{2+\gamma}]. \quad (9)$$

ただし、 $\text{var}(\zeta^{(l)})$ は $\zeta^{(l)}$ の分散で、 $\Phi(x)$ は平均 0、分散 1 の正規分布の累積分布関数である。

(9) の不等式を用いて、信頼水準 α の VaR_α に対する近似誤差評価をしていく。つまり、信頼水準 α のときの真値からの誤差が $\epsilon > 0$ 以上になる確率が $\delta \in (0, 1)$ 以下になるモンテカルロ法の回数 M を考える。これは以下のように表される。

$$P\left(\left|E[\zeta^{(1)}] - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \zeta^{(l)}\right| \geq \epsilon\right) \leq \delta. \quad (10)$$

本研究では、 $\zeta^{(l)}$ は $\mathbf{1}(S_0 - S_T^l \geq VaR_\alpha)$ のことで、 $E[\zeta^{(l)}]$ は $E[\mathbf{1}(S_0 - S_T^l \geq VaR_\alpha)] = \alpha$ となる。 S_T^l は l 番目の満期 T での株価の独立同分布なサンプル値である。 $\sigma^2 :=$

$var(\zeta^{(1)})$ とおき, $\tilde{\zeta}^{(l)} := \zeta^{(l)} - \alpha$, $Z_M = \sum_{i=1}^M \tilde{\zeta}^{(l)} = \sum_{l=1}^M \zeta^{(l)} - M\alpha$ とする. よって, (10) の左辺は

$$\begin{aligned} P\left(\left|E[\zeta^{(1)}] - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \zeta^{(l)}\right| \geq \epsilon\right) &= P\left(\left|\alpha - \frac{1}{M}(Z_M + M\alpha)\right| \geq \epsilon\right) \\ &= P(|Z_n| \geq \epsilon M), \end{aligned} \quad (11)$$

と変形できる. また, $\zeta^{(l)}$ は独立同分布であることから, $B_M = \sum_{l=1}^M var(\tilde{\zeta}^{(l)}) = M\sigma^2$ となり,

$$\Phi_N(x) = P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \tilde{\zeta}^{(l)} \leq x\right) = P(Z_M \leq \sigma\sqrt{M}x),$$

となる. よって, (11) は以下の式に変形できる.

$$\begin{aligned} P(|Z_n| \geq \epsilon M) &= P(Z_M \leq -\epsilon M) + P(Z_M \geq \epsilon M) \\ &= \Phi_M\left(\frac{-\epsilon M}{\sigma\sqrt{M}}\right) + 1 - \Phi_M\left(\frac{\epsilon M}{\sigma\sqrt{M}}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

ここで, (11) に Bikelis の定理 (定理 5.1) を用いると

$$\begin{aligned} (11) &\leq 1 - \Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M}\right) + \frac{AE[|\tilde{\zeta}^{(1)}|^3]}{\sqrt{M}\sigma^3(1 + |\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M}|)^3} \\ &\quad + 1 - \Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M}\right) + \frac{AE[|\tilde{\zeta}^{(1)}|^3]}{\sqrt{M}\sigma^3(1 + |\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M}|)^3} \\ &= 2\left\{1 - \Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M}\right) + \frac{AE[|\tilde{\zeta}^{(1)}|^3]}{\sqrt{M}(\sigma + \epsilon\sqrt{M})^3}\right\} \\ &= 2 \int_{\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + 2 \frac{AE[|\tilde{\zeta}^{(1)}|^3]}{\sqrt{M}(\sigma + \epsilon\sqrt{M})^3} \leq \delta, \end{aligned} \quad (13)$$

となる. (12) の 1 項目に Komatsu's inequality (K. Ito et al. [6] の p.17)

$$\frac{2}{y + \sqrt{y^2 + 4}} e^{-\frac{y^2}{2}} \leq \int_y^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{2}{y + \sqrt{y^2 + 2}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

を適用し, $\tilde{\zeta}^{(1)}$ は $\mathbf{1}(S_0 - S_T \geq VaR_\alpha) - \alpha$ なので, 以下の不等式を得る.

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M} + \sqrt{(\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M})^2 + 2}} e^{-\frac{(\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{M})^2}{2}} + \frac{2AE[\mathbf{1}(S_0 - S_T \geq VaR_\alpha) - \alpha]^3}{\sqrt{M}(\sigma + \epsilon\sqrt{M})^3} - \delta \leq 0. \quad (14)$$

次に, σ と $E[\mathbf{1}(S_0 - S_T \geq VaR_\alpha) - \alpha]^3$ を求めていく. σ^2 は $\mathbf{1}(S_0 - S_T \geq VaR_\alpha) = \beta$ とすると

$$\begin{aligned} var(\beta) &= E[(\beta - \alpha)^2] \\ &= (1 - \alpha)^2 P(S_0 - S_T \geq VaR_\alpha) + (-\alpha)^2 P(S_0 - S_T < VaR_\alpha) \\ &= (1 - 2\alpha + \alpha^2)\alpha + \alpha^2(1 - \alpha) = \alpha - \alpha^2 \end{aligned}$$

となる。また、 $E[|\mathbf{1}(S_0 - S_T \geq VaR_\alpha) - \alpha|^3]$ は

$$\begin{aligned} E[|\beta - \alpha|^3] &= |(1 - \alpha)^3 P(S_0 - S_T \geq VaR_\alpha) + |(-\alpha)^3 P(S_0 - S_T < VaR_\alpha)| \\ &= (1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3)\alpha + \alpha^3(1 - \alpha) = \alpha - 3\alpha^2 + 4\alpha^3 - 2\alpha^4 \end{aligned}$$

となる。これで、(13) を最初に満たす M をシミュレーションによって求めることが可能となる。しかし、正確には本研究では S_T にオイラー・丸山近似を適用するため、(13) の不等式にオイラー・丸山近似の誤差がある。また、Bikelis の定理と Komatsu's inequality で不等式を用いてより大きい値の場合を考えているのでモンテカルロ法の回数 M が必要以上に大きくなっている可能性がある。

6. 数値実験結果と考察

本研究では、VaR と CVaR について株の期待成長率 μ 、ボラティリティの回帰度 η 、ボラティリティの回帰レベル θ 、ボラティリティのボラティリティ κ 、独立な標準ブラウン運動 $W(t)$ 、 $\tilde{W}(t)$ の相関係数 ρ 、満期 T 、オイラー・丸山近似の刻み数 N 、モンテカルロ法の回数 M を変動させた時について考察する。また、本概要では 1 資産の回帰度 η とボラティリティのボラティリティ κ を変動させた場合だけ考察していく。 $\beta_n = \frac{1}{n^a}$, $\gamma_n = \frac{1}{n^b}$ の a, b は $a = 0.75$, $b = 0.55$ とする。

RM の初期値 ξ_0 は株価 S がブラック・ショールズモデルに従うときの VaR の値を採用する。ブラック・ショールズモデルは Black et al. [3] で導入され以下の確率微分方程式で株価を記述するモデルである。

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Heston モデルとの違いはボラティリティ σ が定数である点にある。また、このように ξ_0 を決定する理由として、Heston モデルのボラティリティは回帰レベル θ の平均回帰をもつので、ブラック・ショールズモデルのボラティリティ σ と Heston モデルの回帰レベル θ の値を同じにすることで、 ξ_0 の値を Heston モデルの VaR の真値と比べて大幅にずれないようにするためである。また、ブラック・ショールズモデルは満期 T での分布が分かって VaR が簡単に求めることができる。基準値のサンプル数 M は (13) を最初に下回る値を適用し、 $N = 5.0 \times 10^5$ として求める。また、数値実験ではモンテカルロ法は $N = 2.0 \times 10^4$ 、サンプル数 2.0×10^4 、RM 法と改良 RM 法は $N = 2.0 \times 10^4$ 、更新回数 2.0×10^4 としてシミュレーションで使用する乱数の数を合わせた 3 つを比較した。グラフの縦軸は相対誤差 (%) である。

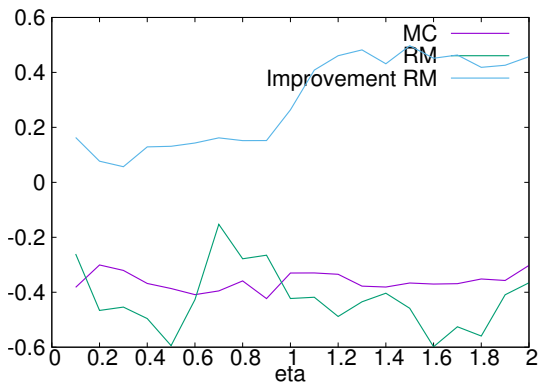


図 1: η を変動させたときの VaR に対する比較

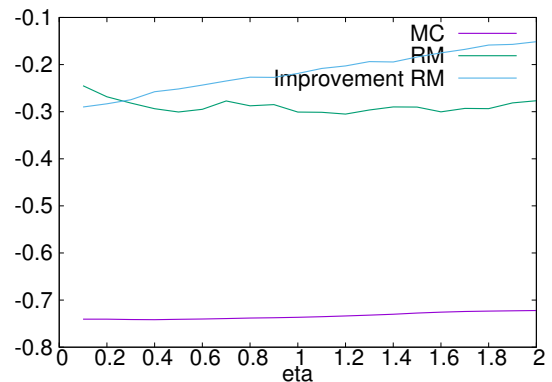


図 2: η を変動させたときの CVaR に対する比較

表 1: : Heston モデルの基本パラメータ

パラメータ	記号	値
初期株価	$S(0)$	100
回帰度	η	1.0
回帰レベル	θ	0.3
ボラティリティのボラティリティ	κ	0.3
W と \tilde{W} の相関係数	ρ	-0.5
期待成長率	μ	0.05
満期	T	1.0
オイラー・丸山近似の刻み数	N	2.0×10^4
モンテカルロ法の回数	M	2.0×10^4
信頼水準	α	0.95

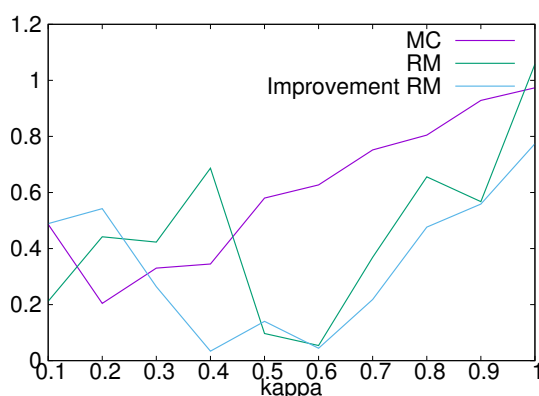


図 3: κ を変動させたときの VaR に対する比較

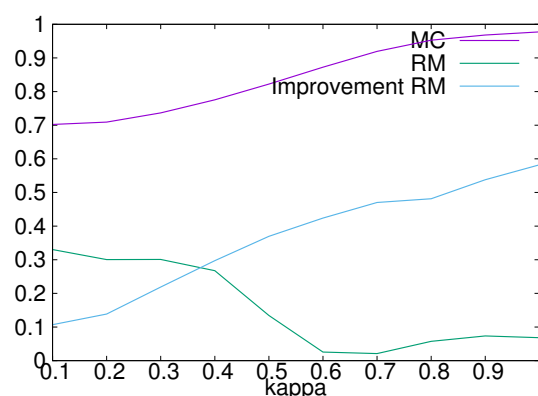


図 4: κ を変動させたときの CVaR に対する比較

図 1 から VaR は η の値が小さいとき, RM 法, モンテカルロ法より改良 RM 法の方が基準値に近いが, η が大きくなると改良 RM 法よりモンテカルロ法の方が基準値に近い. 図 2 から CVaR はモンテカルロ法より改良 RM 法の方が基準値に近いことがグラフより確認される.

図 3 から VaR はモンテカルロ法と改良 RM 法より RM 法の方が基準値に近い. 図 4 から CVaR はモンテカルロ法と RM 法より改良 RM 法の方が基準値に近いことがグラフより確認される.

VaR に関しては精度にばらつきがあり RM 法の有効性は確認できなかったが, CVaR はモンテカルロ法と比べて RM 法は常に良い精度なので有効性が確認できた.

7. まとめ

RM 法の初期値 ξ_0 を株価がブラックショールズのとときの VaR を採用することで, 基準値に近い値を求めることができた. しかし, 数値実験を通して RM 法の初期値 ξ_0 と基準値に近いと良い精度の近似値を求めることができるとは限らないことがわかったので, 他の初期値の決め方も試していきたい. また, 本研究では $\alpha = 0.95$ のみ数値実験を行ったので, $\alpha = 0.99, 0.999$ などより確率的に低い場合にも適用できるかどうか試していきたい.

参考文献

- [1] O. Bardou , N. Frikha, G. Pages, *Computing VaR and CVaR using Stochastic Approximation and Adaptive Unconstrained Importance Sampling*, Monte Carlo Methods and Applications, Volume 15, Issue 3, pp. 173-210, 2009.
- [2] F. Black, M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Volume 81, Issue 3, pp. 637-654, 1973.
- [3] C. Graham, D. Talay, *Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods*, Theoretical and Applied Finance, Springer, 2010.
- [4] S. L. Heston, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, The Review of Financial Studies, Volume 6, Issue 2, pp. 327-343, 1993.
- [5] K. Ito , H. P. McKean, Jr, *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Classic in Mathematics, Springer, 1974.
- [6] T. Mikosch, *ファイナンスのための確率微分方程式*, 東京電機大学出版局 , 1998年.
- [7] S. E. Shreve , *ファイナンスのための確率解析 II*, 丸善出版, 2008年.