禁止グラフによって定義される集合の包含関係について

横田真秀 (東京理科大学大学院 理学研究科)

平成 29 年 1 月 26 日

2 つのグラフ G, H が与えられたとき, G のいくつかの頂点およびその頂点を結ぶ全ての辺をとることで H が得られるとき G は H を誘導部分グラフとしてもつといい, そうでないとき G は $H-$free であるという. また, グラフの集合 $\mathcal{H}$ が与えられたとき, $\mathcal{G}_1(\mathcal{H}) := \{G :$ 連結 $|G$ は任意の $H \in \mathcal{H}$ に対して $H-$free$\}$ によってグラフの集合 $\mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ を定義する.

直感的には, 何かしら悪い性質を持った局所的な構造のリスト $\mathcal{H}$ があるとき, それらをいずれも含まない"良い"グラフを集めたものが $\mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ であるといえる. そのため, グラフ G が $\mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ に属するという条件は命題の十分条件となりやすい. 実際に, 次数条件等を適宜補った上で, グラフ G が $\mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ に属するならば性質 $\mathcal{P}$ を持つ, と主張する形の命題は数多く証明されている. それらは例えば以下のようなものである.

theorem 0.1 (Sumner, 1974 [3]) 位数が偶数である $K_{1,3}-free$ グラフは $1-factor$ を持つ.

theorem 0.2 (Kelmans, 2007 [2]) 位数が 3 の倍数である $2-$ 連結 $K_{1,3}-free$ グラフは $P_3-factor$ を持つ.

しかしながら, $\mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ の形で表される集合そのものにどのような関係性があるかという, より根本的ともいえる問題については未知の部分が非常に多いのが現状である. 特に問題となるのが, $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ との間に集合としては差がある場合でも $\mathcal{G}_1(\mathcal{H}_1)$ と $\mathcal{G}_1(\mathcal{H}_2)$ とは集合としてほぼ等しくなる場合があるということである. これはグラフの諸性質に対する十分条件を禁止部分グラフによって記述する, という目的から見るとあまり好ましくないことである. 先述のように $G \in \mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ を十分条件として据えた命題を考えるにあたり, $G \in \mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ 間の関係が明確でなければ実質的に同等である命題を別個に証明するようなことになりかねないのである.

このような経緯から, $|\mathcal{G}_1(\mathcal{H}_1) \triangle \mathcal{G}_1(\mathcal{H}_2)| < \infty$ なる $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の組を決定せよ, という問題が提起された. これを完全に決定することは困難であるが, 2 つのグラフの族 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ が $|\mathcal{G}_1(\mathcal{H}_1) \triangle \mathcal{G}_1(\mathcal{H}_2)| < \infty$ を満たすための条件が調べられており, その系として以下の結果が得られていた.

theorem 0.3 (Fujita Furuya Ozeki [1]) H を $|H| \geq 4$ なる連結グラフとし, グラフの集合 $\mathcal{H}$ が $|\mathcal{G}_1(\{H\}) \triangle \mathcal{G}_1(\mathcal{H})| < \infty$ を満たしているとする. このとき $|\mathcal{H}| \geq 4$ である.

私はこれを部分的に改良し, 以下の結果を得た.

theorem 0.4 H を $N[v_1] = N[v_2]$ なる *2* 頂点 v_1, v_2 を持たない連結グラフとし, グラフの集合 $\mathcal{H}$ が $|\mathcal{G}_1(\{H\}) \triangle \mathcal{G}_1(\mathcal{H})| < \infty$ を満たしているとする. このとき $|\mathcal{H}| \geq |H| - 1$ である.

そしてまた, H の対称性が H の位数に対して低ければ $N[v_1] = N[v_2]$ なる 2 頂点 v_1, v_2 を持たないという仮定が無くとも同様の結果が得られることを示した. 本講演ではこれらの結果を紹介する.

参考文献

[1] S.Fujita, M.Furuya and K.Ozeki, Forbidden subgraphs generating almost the same sets, Combin. Probab. Comput. 22 (2013) 733-748.

[2] A. K. Kelmans, On $\Lambda-$packings in claw-free graphs, RUTCOR Research Report 24-2007, Rutgers University (2007).

[3] D.P. Sumner, Graphs with 1-factors, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974) 8-12.