一般化された Korteweg-de Vries-Burgers 方程式の解の漸近挙動

福田一貴

北海道大学大学院理学院数学専攻修士課程二年

1　導入

本研究では, 非線形波動を記述する方程式の一つである, 以下の一般化された Korteweg de-Vries-Burgers 方程式 (以下, KdV-Burgers と略記する) に対する初期値問題の時間大域解の漸近挙動について考える:

$$\begin{gathered} u_t + (f(u))_x + k u_{xxx} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

ここで, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, $b \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ に対して $f(u) = (b/2)u^2 + (c/3)u^3$ とし, $k \in \mathbb{R}$ とする. 添え字の t 及び x はそれぞれ t と x に関する偏微分を表す. またこの方程式は, 未知関数 $u(x,t)$ を保存量とする, 分散項を持つ粘性保存則方程式とも呼ばれており, u_{xx} は粘性項, u_{xxx} は分散項, $(f(u))_x$ は移流項などと呼ばれる (詳細は [7] 等). 本研究では初期値問題 (1.1) の解の漸近挙動を考察する. さらに解の第 2 漸近形を構成することによって, 得られた漸近形への最適な漸近レートを導く.

2　既知の結果

これまで, 一般化された KdV-Burgers 方程式の解の漸近挙動に関する研究はほとんど行われていない. しかし, 分散項のない $k = 0$ の場合 (一般化された Burgers 方程式) や, 非線形項が一般化されていない $c = 0$ の場合（KdV-Burgers 方程式）についてはそれぞれよく研究されており, 漸近形やその漸近レートが与えられている. 以下, それらの結果について代表的なものを紹介する.

一般化された Burgers 方程式について

初期値問題 (1.1) で $k = 0$ とした以下の方程式は, 一般化された Burgers 方程式と呼ばれている:

$$\begin{gathered} u_t + (f(u))_x = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

この初期値問題 (2.1) の解は非線形散逸波と呼ばれる以下の関数 $\chi(x,t)$ に漸近することが知られている.

$$\chi(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+t}} \chi_* \left(\frac{x}{\sqrt{1+t}} \right), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

ここで,

$$\chi_*(x) \equiv \frac{1}{b} \frac{(e^{b\delta/2} - 1) e^{-x^2/4}}{\sqrt{\pi} + (e^{b\delta/2} - 1) \int_{x/2}^{\infty} e^{-y^2} dy}, \quad \delta \equiv \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx, \quad b \neq 0.$$

非線形散逸波 $\chi(x,t)$ は, Hopf-Cole 変換と呼ばれる, 非線形方程式を線形の熱方程式に書き換える変換を用いることによって,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x,0) dx = \delta$$

を満たす Burgers 方程式

$$\chi_t + \left(\frac{b}{2} \chi^2 \right)_x = \chi_{xx} \tag{2.3}$$

の自己相似解であることがわかる (詳しくは [7] の p.50-53 及び p.96-98 を参照). 初期値問題 (2.1) の解が非線形散逸波に漸近するその漸近レートが Matsumura と Nishihara [7] によって示されている. 実際,

$$w_0(x) = \exp\left(-\frac{b}{2} \int_{-\infty}^{x} u_0(y) dy \right) - \exp\left(-\frac{b}{2} \int_{-\infty}^{x} \chi(y,0) dy \right)$$

とおき, $w_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ とし, $\|w_0\|_{H^2} + \|w_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいと仮定すると, 次の評価が成り立つ:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}\log(2+t)(\|w_0\|_{H^2} + \|w_0\|_{L^1} + |\delta|^{3/2}), \quad t \ge 0. \tag{2.4}$$

ここで疑問となるのは, この時間減衰評価 (2.4) が最適な評価であるかどうか, 右辺の log 項を取り除いた評価が得られるかどうかということである. このことに関して, Kato [5] によって, $\delta \neq 0$, $c \neq 0$, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$, かつ $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^1}$ が十分小さいときに, この評価が最適であることが示された. ここで, $\|u_0\|_{L^1_1} \equiv \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|(1+|x|)dx$ とした. 実際, 解の第 2 漸近形 $V_1(x,t)$ とその第 2 漸近形への漸近に関する評価が以下で与えられる:

$$V_1(x,t) \equiv -\frac{cd}{12\sqrt{\pi}} V_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)(1+t)^{-1}\log(2+t), \quad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

とおく. ここで

$$V_*(x) \equiv (b\chi_*(x) - x)e^{-x^2/4}\eta_*(x), \quad \eta_*(x) \equiv \exp\left(\frac{b}{2}\int_{-\infty}^x \chi_*(y)dy\right), \quad d \equiv \int_{\mathbb{R}} (\eta_*(y))^{-1}(\chi_*(y))^3 dy.$$

解 $u(x,t)$ と非線形散逸波 $\chi(x,t)$, 及び $V_1(x,t)$ に対して, 次が成り立つ.

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V_1(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^1})(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1. \tag{2.5}$$

この評価 (2.5) と三角不等式, 及び $V_1(x,t)$ の定義を用いることによって, 上の評価 (2.4) は最適であることがわかる. すなわち解 $u(x,t)$ が非線形散逸波 $\chi(x,t)$ に $t^{-1}\log t$ のレートで漸近することがわかり, さらに $u-\chi$ は第 2 漸近形 $V_1(x,t)$ へ t^{-1} のレートで漸近することがわかった.

KdV-Burgers 方程式について

一方, 初期値問題 (1.1) で $b=1$, $c=0$, $k=1$ とした以下の KdV-Burgers 方程式

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} &= u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.6}$$

の解の漸近挙動についても, 上記の一般化された Burgers 方程式と同様に, 非線形散逸波 $\chi(x,t)$ への漸近に関する結果が得られており, kato の研究に類似の第 2 漸近形の構成がなされている. 具体的には, Kaikina と Ruiz-Paredes [3] により, $s > -1/2$ として, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ のときに, 放物型方程式の smoothing effect を用いることで, (2.5) に類似の評価が導かれた:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V_2(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le Ct^{-1}\sqrt{\log t}, \quad t > 1. \tag{2.7}$$

ここで,

$$V_2(x,t) \equiv \tilde{V_*}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)t^{-1}\log t, \quad \tilde{V_*}(x) \equiv -\frac{(\chi_*(x) - x/2)e^{-x^2/4}}{2\sqrt{\pi}H(x)}\int_{\mathbb{R}} H(y)(\chi_*(y))^3 dy,$$

$$H(x) \equiv \cosh\left(\frac{\delta}{4}\right) - \sinh\left(\frac{\delta}{4}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy$$

であり, さらに C は u_0 に依存した定数である. この結果によって, KdV-Burgers 方程式の解も同様に, 非線形散逸波 $\chi(x,t)$ に $t^{-1}\log t$ のレートで漸近し, このレートが最適であることがわかる. ここで, $V_1(x,t)$ と $V_2(x,t)$ は一見異なる関数のように見えるが, 本質的には同じものであることに注意する. しかし第 2 漸近形 $V_2(x,t)$ への漸近レートに関しては, 一般化された Burgers 方程式のときの Kato の結果 (2.5) と比べると, (2.7) は $\sqrt{\log t}$ 分粗い評価となっている. Kaikina と Paredes は彼らの論文 [3] の中で, この $\sqrt{\log t}$ は, より繊細な計算によって取り除けると述べているが, 証明はされていない.

3　主結果

先行研究を踏まえて, 本研究では, 一般化された KdV-Burgers 方程式の初期値問題 (1.1) の解の漸近挙動に関する研究を行い, 解の第 2 漸近形の構成及びその漸近に関して, Kato の結果 (2.5) を包含してかつ Kaikina 等の評価 (2.7) を改良した結果を得ることができた. 具体的な主結果は以下のとおりである:

定理 1 ([1] の定理 1.1)**.** $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^3}$ は十分小さいと仮定する. このとき初期値問題 (1.1) は, $u \in C^0([0,\infty); H^3)$ かつ $\partial_x u \in L^2(0,\infty; H^3)$ を満たす唯一の時間大域解 $u(x,t)$ を持つ. さらに, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}) \cap W^{3,1}(\mathbb{R})$ かつ $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}}$ が十分小さいとすると, 以下の評価が成り立つ :

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{W^{3,1}})(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1. \tag{3.1}$$

ここで, $\chi(x,t)$ は (2.2) で定義された非線形散逸波であり, $V(x,t)$ は次で定められた関数である :

$$V(x,t) \equiv -\frac{d}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{b^2k}{8} + \frac{c}{3}\right)V_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)(1+t)^{-1}\log(2+t), \quad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

$$V_*(x) \equiv (b\chi_*(x) - x)e^{-x^2/4}\eta_*(x), \quad \eta_*(x) \equiv \exp\left(\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x}\chi_*(y)dy\right), \quad d \equiv \int_{\mathbb{R}}(\eta_*(y))^{-1}(\chi_*(y))^3dy. \tag{3.3}$$

4　基本的な補題

次の章で述べる, 主定理を示すために必要な評価は, すべて以下の基本的な補題によって導かれる. 一つ目は, 熱方程式の解作用素 $e^{t\Delta}$ に対する減衰評価である.

補題 1. m を正整数とし, $f \in H^m(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ とする. 任意の整数 $0 \le l \le m$ に対して次が成り立つ.

$$\|\partial_x^l e^{t\Delta} f\|_{L^2} \le C(1+t)^{-(1/4+l/2)}\|f\|_{L^1} + e^{-t}\|\partial_x^l f\|_{L^2}, \quad t \ge 0. \tag{4.1}$$

ここで, $e^{t\Delta} f \equiv F^{-1}[e^{-t|\xi|^2}\hat{f}(\xi)]$ であり, F^{-1} はフーリエ逆変換を表す.

二つ目は, 解 $u(x,t)$ 自身に関する時間減衰評価である. まず, Hayashi と Naumkin [2] は初期値問題 (2.6) に対して, 解 $u(x,t)$ 自身の時間減衰評価を導いた. 本研究で取り扱う初期値問題 (1.1) に対しても, 初期値が十分小さいという仮定の下で, 全く同様にして解 $u(x,t)$ に関する評価を導くことができる:

補題 2. $u_0 \in H^3(\mathbb{R}) \cap W^{3,1}(\mathbb{R})$ と仮定し, $\|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}}$ が十分小さいとする. このとき, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ と $p \in [1,\infty]$, $l = 0,1,2,3$ に対して, 以下の評価が成り立つ :

$$\|\partial_x^l u(\cdot,t)\|_{L^p} \le C(\|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}})(1+t)^{-(1/2)(1-1/p)-l/2}, \quad t > 0. \tag{4.2}$$

三つ目は, 非線形散逸波 $\chi(x,t)$ 及び熱核に関する時間減衰評価である. 非線形散逸波は, (2.2) によってその形が具体的に表されているので, 直接計算することによって次のことを確かめることができる:

$$|\chi(x,t)| \le C|\delta|(1+t)^{-1/2}e^{-x^2/4(1+t)}, \quad t \ge 0, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

さらに $\chi(x,t)$ と, 熱核 $G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$ の微分に関する評価も得ることができる ([1] の補題 4.1).

補題 3. α と β を非負の整数とする. このとき $p \in [1,\infty]$ に対して次が成り立つ.

$$\|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \chi(\cdot,t)\|_{L^p} \le C|\delta|(1+t)^{-(1/2)(1-1/p)-\alpha/2-\beta}, \quad t \ge 0, \tag{4.4}$$

$$\|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta G(\cdot,t)\|_{L^p} \le Ct^{-(1/2)(1-1/p)-\alpha/2-\beta}, \quad t > 0. \tag{4.5}$$

この補題 1, 2, 3 は主定理の証明において, 本質的に重要な役割を果たす. 次に, 後に用いる記号として, 以下の関数を定義する.

$$\eta_1(x,t) \equiv \eta_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right) = \exp\left(\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x} \chi(y,t)dy\right), \tag{4.6}$$
$$\eta_2(x,t) \equiv (\eta_1(x,t))^{-1}. \tag{4.7}$$

これらの関数に対しては簡単に次のことがわかる.

$$\min\{1, e^{b\delta/2}\} \le \eta_1(x,t) \le \max\{1, e^{b\delta/2}\},$$
$$\min\{1, e^{b\delta/2}\} \le \eta_2(x,t) \le \max\{1, e^{b\delta/2}\}.$$

さらに補題 3 を用いることによって, $\eta_1(x,t)$ と $\eta_2(x,t)$ に関する以下の評価式を導くことができる:

補題 4. l を正整数とし, $i = 1, 2$ とする. このとき $|\delta| \le 1$ ならば, 次が成り立つ.

$$\|\partial_x^l \eta_i(\cdot,t)\|_{L^1} \le C|\delta|(1+t)^{-(l-1)/2}, \tag{4.8}$$
$$\|\partial_x^l \eta_i(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C|\delta|(1+t)^{-l/2}, \tag{4.9}$$
$$\|\partial_x^l \eta_i(\cdot,t)\|_{L^2} \le C|\delta|(1+t)^{-(l/2-1/4)}. \tag{4.10}$$

5 主定理を示すために必要な評価

初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ と非線形散逸波 $\chi(x,t)$ に対して, $\psi(x,t) = u(x,t) - \chi(x,t)$ とおくと, $\psi(x,t)$ は以下の摂動方程式を満たすことがわかる:

$$\psi_t + (b\chi\psi)_x + \left(\frac{b}{2}\psi^2\right)_x + \left(\frac{c}{3}(\psi+\chi)^3\right)_x + k\psi_{xxx} + k\chi_{xxx} - \psi_{xx} = 0. \tag{5.1}$$

本研究では小さな初期値に対する初期値問題の解を考えているということと, 補題 2, 3 により, ψ の二次の項や三次の項, 三階導関数 ψ_{xxx} は他の項に比べて早く減衰していることに注意すると, ψ の $t \to \infty$ での漸近展開の主要項は次の方程式の解 v で与えられると考えることができる:

$$v_t + (b\chi v)_x + \left(\frac{c}{3}\chi^3\right)_x + k\chi_{xxx} - v_{xx} = 0. \tag{5.2}$$

よって, この方程式の解を調べる必要がある. このため, この方程式 (5.2) の斉次方程式に対する以下の初期値問題の解析が重要となる:

$$\begin{gathered} z_t + (b\chi z)_x - z_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ z(x,0) = z_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

以下で与えられる, この初期値問題の具体的な解の表現公式が定理 1 の証明において本質的な役割を果たす.

補題 5.

$$U[w](x,t,s) \equiv \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t-s)\eta_1(x,t))\eta_2(y,s)\int_{-\infty}^{y} w(\xi)d\xi dy, \quad 0 \le s < t, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

と定義すると, 初期値問題 (5.3) の解は次のように表される :

$$z(x,t) = U[z_0](x,t,0), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

この解作用素 U に対する以下の二つの評価が Kato [5] によって与えられた.

補題 6. $\beta \in [0,1]$, m は正整数とし, $p \in [1,\infty]$ とする．さらに $|\delta| \le 1$, $z_0 \in L^1_\beta(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} z_0(x)dx = 0$ と仮定する．このとき任意の整数 $0 \le m \le l$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\|\partial_x^l U[z_0](\cdot,t,0)\|_{L^p} \le Ct^{-(1-1/p+\beta+l)/2}\|z_0\|_{L^1_\beta}, \quad t>0. \tag{5.6}$$

補題 7. m は正整数とし, $|\delta| \le 1$, $z_0 \in H^m(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} z_0(x)dx = 0$ と仮定する．このとき任意の整数 $0 \le m \le l$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\|\partial_x^l U[z_0](\cdot,t,0)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-(1/4+l/2)}\|z_0\|_{L^1} + e^{-t}\|z_0\|_{H^l}, \quad t>0. \tag{5.7}$$

この二つの補題から, 次の一様評価が導かれる．

系 1. m は正整数とし, $|\delta| \le 1$, $z_0 \in H^m(\mathbb{R}) \cap L^1_1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} z_0(x)dx = 0$ と仮定する．このとき任意の整数 $0 \le m \le l$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\|\partial_x^l U[z_0](\cdot,t,0)\|_{L^2} \le C(\|z_0\|_{H^l} + \|z_0\|_{L^1_1})(1+t)^{-(3/4+l/2)}, \quad t>0. \tag{5.8}$$

初期値問題 (5.3) に対する非斉次方程式の解に対する時間減衰評価も次のように与えられる:

補題 8. m は正整数とし, $|\delta| \le 1$, $w \in C^0(0,\infty;H^m) \cap C^0(0,\infty;W^{m,1})$ と仮定する．このとき任意の整数 $0 \le m \le l$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^l \int_0^t U[\partial_x w(s)](\cdot,t,s)ds\right\|_{L^2} \le& C\int_0^{t/2}(1+t-s)^{-(3/4+l/2)}\|w(\cdot,t)\|_{L^1}ds \\ &+ C\sum_{n=0}^{l}\int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-3/4}(1+s)^{-(l-n)/2}\|\partial_x^n w(\cdot,s)\|_{L^1}ds \\ &+ C\sum_{n=0}^{l}\left(\int_0^t e^{-(t-s)}(1+s)^{-(l-n)}\|\partial_x^n w(\cdot,s)\|_{L^2}^2 ds\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

6 主定理の証明の概略

以下, 定理 1 の証明の概略を述べる．前章での考察を踏まえて, まず以下の初期値問題の解を調べる．

$$\begin{aligned} v_t + (b\chi v)_x + \left(\frac{c}{3}\chi^3\right)_x + k\chi_{xxx} - v_{xx} = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

補題 5 と Duhamel の原理を用いることによって, この初期値問題の解は,

$$v(x,t) = \int_0^t U[\partial_x(-(c/3)\chi^3) - k\chi_{xxx}](x,t,s)ds$$

と表すことができるので, 補題 3 と補題 8 を用いることで, 次が成り立つことがわかる:

補題 9. l を非負整数とし, $|\delta| \le 1$ とする．このとき次の評価が成り立つ．

$$\|\partial_x^l v(\cdot,t)\|_{L^2} \le C|\delta|(1+t)^{-(3/4+l/2)}\log(2+t), \quad t \ge 0. \tag{6.2}$$

いま, $w(x,t) = u(x,t) - \chi(x,t) - v(x,t)$ とおくと, $w(x,t)$ に関する次の初期値問題を得る:

$$\begin{aligned} w_t + (b\chi w)_x - w_{xx} = g(w,\chi,v)_x - kw_{xxx} - kv_{xxx}, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ w(x,0) = w_0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

ここで,

$$g(w,\chi,v) = -\frac{b}{2}(w+v)^2 - \frac{c}{3}\left(w^3 + v^3 + 3(w+v)(w+\chi)(\chi+v)\right), \tag{6.4}$$

$$w_0(x) = u_0(x) - \chi(x,0) \tag{6.5}$$

であり, 初期値に対する仮定から, $w_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} w_0(x)dx = 0$ であることに注意する. 再び Duhamel の原理を用いると, 初期値問題 (6.3) の解は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} w(x,t) &= U[w_0](x,t,0) + \int_0^t U[\partial_x g(w,\chi,v)(s)](x,t,s)ds - k\int_0^t U[w_{xxx} + v_{xxx}](x,t,s)ds. \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{6.6}$$

以下 $w(x,t)$ に関する評価を導く.

$$N(T) \equiv \sup_{0\le t\le T} \sum_{n=0}^{1} (1+t)^{3/4+n/2} \|\partial_x^n w(\cdot,t)\|_{L^2}$$

とおく. すると補題 3 と補題 9 を用いることで, $l = 0, 1$ に対して次の評価を得ることができる.

$$\|\partial_x^l g(\cdot,t)\|_{L^1} \le C(1+t)^{-(3/2+l/2)}((|\delta|\log(2+t))^2 + N(T)^2), \tag{6.7}$$

$$\|\partial_x^l g(\cdot,t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-(7/4+l/2)}((|\delta|\log(2+t))^2 + N(T)^2). \tag{6.8}$$

I_1 については系 1 を用いることによって,

$$\|\partial_x^l I_1(\cdot,t)\|_{L^2} \le C(\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1_1})(1+t)^{-(3/4+l/2)} \tag{6.9}$$

を得ることができる. I_2 については補題 8 と (6.7), (6.8) を用いて,

$$\|\partial_x^l I_2(\cdot,t)\|_{L^2} \le C(|\delta|^2 + N(T)^2)(1+t)^{-(3/4+l/2)} \tag{6.10}$$

が得られる. I_3 については, まず $w + v = u - \chi = \psi$ であることより, 補題 2 と補題 3, 補題 9 等を用いて次を得る.

$$\|\partial_x^l \psi(\cdot,t)\|_{L^p} \le C(\|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}})(1+t)^{-(1/2)(1-1/p)-l/2}, \quad p \in [1,\infty], \quad l = 0,1,2,3, \tag{6.11}$$

$$\|\partial_x^l \psi(\cdot,t)\|_{L^2} \le C(|\delta|\log(2+t) + N(T))(1+t)^{-(3/4+l/2)}, \quad l = 0,1. \tag{6.12}$$

ここで I_3 に直接補題 8 を適用してしまうと, うまくいかない. そこで部分積分と (6.11), (6.12) を用いて直接積分を評価することによって, 次を得る.

$$\|\partial_x^l I_3(\cdot,t)\|_{L^2} \le C(\|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}} + |\delta|^2 + N(T)^2)(1+t)^{-(3/4+l/2)}, \quad l = 0,1. \tag{6.13}$$

ここで, $|\delta| \le \|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}}$ に注意して, (6.9), (6.10), (6.13) を組み合わせることによって, 次が得られる.

$$(1+t)^{3/4+l/2}\|\partial_x^l w(\cdot,t)\|_{L^2} \le C(\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}} + N(T)^2), \quad l = 0,1. \tag{6.14}$$

従って $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}}$ が十分小さいことより, 次の命題を得ることができた.

命題 1. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^3}$ は十分小さいと仮定する. このとき初期値問題 (1.1) は, $u \in C^0([0,\infty); H^3)$ かつ $\partial_x u \in L^2(0,\infty; H^3)$ を満たす唯一の時間大域解 $u(x,t)$ を持つ. さらに, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}) \cap W^{3,1}(\mathbb{R})$ かつ $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{W^{3,1}}$ が十分小さいとすると, $l = 0, 1$ に対して以下の評価が成り立つ.

$$\|\partial_x^l(u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - v(\cdot,t))\|_{L^2} \le C(\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{W^{3,1}})(1+t)^{-(3/4+l/2)}, \quad t \ge 0. \tag{6.15}$$

特に, ソボレフの不等式を用いることによって, 次が成り立つ.

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{W^{3,1}})(1+t)^{-1}, \quad t \ge 0. \tag{6.16}$$

最後に以下の命題 2 を示す．命題 1 と命題 2 を組み合わせることによって, 定理 1 は直ちに得られる．

命題 2. $|\delta| \leq 1$ とする．初期値問題 (6.1) の解 $v(x,t)$ と (3.2) で定義された関数 $V(x,t)$ に対して, 次の評価が成立する．

$$\|v(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C|\delta|(1+t)^{-1}. \tag{6.17}$$

これについては, まず初期値問題 (6.1) の具体的な解表示を用いて,

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t-s)\eta_1(x,t))\eta_2(y,s)(-(c/3)\chi(y,s)^3 - k\chi_{xx}(y,s))dyds \\
&= \int_{t/2}^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t-s)\eta_1(x,t))\eta_2(y,s)(-(c/3)\chi(y,s)^3 - k\chi_{xx}(y,s))dyds \\
&\quad + \int_0^{t/2} \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t-s)\eta_1(x,t))\eta_2(y,s)(-(c/3)\chi(y,s)^3 - k\chi_{xx}(y,s))dyds \\
&\equiv J_1 + J_2.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

J_1 については補題 3 等を用いて次を得る．

$$\|J_1(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C|\delta|(1+t)^{-1}. \tag{6.19}$$

J_2 についてはまず,

$$\begin{aligned}
\Lambda(x,y,t,s) &\equiv \partial_x(G(x-y,t-s)\eta_1(x,t)) \\
&= \partial_x G(x-y,t-s)\eta_1(x,t) + \frac{b}{2}\chi(x,t)G(x-y,t-s)\eta_1(x,t), \\
F(y,s) &\equiv \eta_2(y,s)(-(c/3)\chi(y,s)^3 - k\chi_{xx}(y,s))
\end{aligned}$$

とおき, 部分積分を用いて J_2 を変形すると,

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^{t/2} \int_{\mathbb{R}} \Lambda(x,y,t,s)F(y,s)dyds \\
&= \int_0^{t/2} \int_0^\infty \Lambda_y(x,y,t,s) \int_y^\infty F(q,s)dqdyds - \int_0^{t/2} \int_{-\infty}^0 \Lambda_y(x,y,t,s) \int_{-\infty}^y F(q,s)dqdyds \\
&\quad + \int_0^{t/2} \Lambda(x,0,t,s) \int_{\mathbb{R}} F(q,s)dqds \\
&\equiv J_3 + J_4 + J_5.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

さらに

$$\Lambda_y(x,y,t,s) = -\eta_1(x,t)(\partial_x^2 G(x-y,t-s) + (b/2)\chi(x,t)\partial_x G(x-y,t-s))$$

であるので, 再び補題 3 を用いることによって,

$$\sup_{0\leq s\leq t/2} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{y\in\mathbb{R}} |\Lambda_y(x,y,t,s)| \leq Ct^{-3/2}. \tag{6.21}$$

さらに部分積分を用いることによって,

$$\begin{aligned}
\int_y^\infty F(q,s)dq &= k\eta_2(y,s)\left(\chi_x(y,s) + \frac{b}{4}\chi(y,s)^2\right) - \left(\frac{b^2k}{8} + \frac{c}{3}\right)\int_y^\infty \eta_2(q,s)\chi(q,s)^3 dq, \\
\int_y^\infty F(q,s)dq &= -k\eta_2(y,s)\left(\chi_x(y,s) + \frac{b}{4}\chi(y,s)^2\right) - \left(\frac{b^2k}{8} + \frac{c}{3}\right)\int_{-\infty}^y \eta_2(q,s)\chi(q,s)^3 dq.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

よって, (6.21), (6.22) と補題 3 を用いることによって, J_3, J_4 について以下を得る．

$$\|J_3(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C|\delta|(1+t)^{-1}, \quad t \geq 1, \tag{6.23}$$

$$\|J_4(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C|\delta|(1+t)^{-1}, \quad t \geq 1. \tag{6.24}$$

最後に J_5 については, まず (3.3) と部分積分によって,

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_2(y,s)\chi(y,s)^3 dy = d(1+s)^{-1}, \qquad \int_{\mathbb{R}} \eta_2(y,s)\chi_{xx}(y,s)dy = \frac{b^2 d}{8}(1+s)^{-1}.$$

これを用いて J_5 を変形すると,

$$\begin{aligned} J_5 =& -d\left(\frac{b^2k}{8}+\frac{c}{3}\right)\eta_1(x,t)\int_0^{t/2}(1+s)^{-1}\left(\partial_x G(x,t-s)+\frac{b}{2}\chi(x,t)G(x,t-s)\right)ds \\ =& -d\left(\frac{b^2k}{8}+\frac{c}{3}\right)\eta_1(x,t)\int_0^{t/2}(1+s)^{-1}\Big(\partial_x G(x,t-s)-\partial_x G(x,t+1) \\ &+\frac{b}{2}\chi(x,t)(G(x,t-s)-G(x,t+1))\Big)ds \\ &-d\left(\frac{b^2k}{8}+\frac{c}{3}\right)\eta_1(x,t)\left(\partial_x G(x,t+1)+\frac{b}{2}\chi(x,t)G(x,t+1)\right)\log\left(1+\frac{t}{2}\right) \\ \equiv& J_{5.1}+J_{5.2} \end{aligned} \tag{6.25}$$

が得られる. 補題 3 を用いて $J_{5.1}$ は,

$$\|J_{5.1}(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C|\delta|^3(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1, \tag{6.26}$$

と評価できる. 最後に $V(x,t)$ の定義 (3.2), (3.3) を用いて直接計算することにより,

$$\|J_{5.2}(\cdot,t)-V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C|\delta|^3(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1. \tag{6.27}$$

(6.19), (6.23), (6.24), (6.26) 及び (6.27) を組み合わせることで, 命題 2 は示された.

参考文献

[1] 福田一貴: *Asymptotic Behavior of Solution to the Generalized Korteweg-de Vries-Burgers Equation*, 北海道大学大学院理学院修士論文, 2017 (未公刊).

[2] N. Hayashi and P.I. Naumkin: *Asymptotics for the Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **22**, (2006), 1441-1456.

[3] I. Kaikina and F. Ruiz-Paredes: *Second Term of Asymptotics for KdVB Equation with Large initial Data*, Osaka J. Math, **42**, (2005), 407-420.

[4] G. Karch: *Self-similar large time behavior of solutions to Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Nonlinear Analysis, **35**, (1999), 199-219.

[5] M. Kato: *Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations*, Osaka J. Math, **44**, (2007), 923-943.

[6] S. Kawashima: *Large-time behavior of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications*, Proc. Roy. soc. Edinburgh Sect. A 106 (1987), 169-194.

[7] 松村昭孝, 西原健二: 改訂版 非線形微分方程式の大域解-圧縮性粘性流の数学解析, 日本評論社, 2015.