エルゴード最適化問題と

非可算個のエルゴード的な maximizing measure を持つ関数の稠密性

慶應義塾大学大学院　理工学研究科　修士 2 年
篠田万穂 (Shinoda Mao) *

1 Introduction

力学系 (X, T) 上の関数 ϕ が与えられた際に, ϕ の空間平均を最大にする T-不変確率測度を maximizing measure と呼ぶ. 関数の時間平均は Birkhoff のエルゴード定理によりその時間平均と結びつく.

本講演では, まず円周 $\mathbb{T}$ 上の C^1 写像による力学系を考え, 各軌道の「指数的不安定性」が関数 $\log|DT(x)|$ の時間平均で表されることを確かめる. 次に, 軌道の指数的不安定性を最大にする軌道は何かという問題を, Birkhoff のエルゴード定理を用いて maximizing measure の性質に関する問題に読み替える. 最後に, 非可算個の maximizing measure の存在に関する主定理を述べる.

1.1 円周上の力学系と Lyapunov 数

円周 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の C^1 級写像 $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を考える. 写像 T の反復を $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ と表し, 点 $x \in \mathbb{T}$ の T の反復による像 $O(x) = \{T^n x : n \geq 0\}$ を x の軌道と呼ぶ. 力学系理論では, このような空間と写像の組 $(\mathbb{T}, T)$ を力学系と呼び, その各点の軌道の定性的な性質を調べていく.

例 1 (Rotation Map)**.** $a \in (0, 1)$ に対して $R_a : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を $R_a(x) = x + a \pmod 1$ と定義する. a が有理数の場合, $a = \frac{q}{p}$ とすると, 任意の点が $(R_a)^p(x) = x$ を満たし, 周期 p の周期点となる. 一方 a が無理数の場合, 任意の点の軌道は $\mathbb{T}$ で稠密となり, 周期点は存在しない.

*e-mail : shinoda-mao@z3.keio.jp

例 2 (Expanding Map)**.** $S : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を $S(x) = 2x \pmod 1$ と定義する．異なる 2 点 $x, y \in \mathbb{T}$ に対して, 平均値の定理から

$$|S(x) - S(y)| = 2|x - y|$$

が成り立ち, S によって 2 点間の距離は拡大する．このような性質により, 例 1 の Rotation Map とは異なる非自明な軌道の再帰が起こり, 軌道の様子が点 x の取り方に鋭敏に依存する．

一般に, $\min_{x \in \mathbb{T}} |DT(x)| > 1$ を満たす円周上の C^1 級写像 T を expanding map と呼ぶ. expanding map による力学系に対し「記号化」という操作を行うことにより, すべての周期の周期点の存在や, $\mathbb{T}$ で稠密な軌道を持つ点の存在を示すことができる．

例 2 のように, 2 点の距離が写像の反復によって拡大されていく性質,「軌道の不安定性」を調べるためには, Lyapunov 数が利用される。これは力学系の複雑さを捉える指標の 1 つである．点 x の軌道に沿う T の指数的な拡大率は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |DT^n(x)| \tag{1}$$

と表され, 極限値 (1) が存在するときには, それを x の軌道に対する Lyapunov 数と呼ぶ. Lyapunov 数が存在し, 正の値をとることは, その軌道が指数的な不安定性を持つことを表す．Lyapunov 数はすべての点 x について存在するとは限らず, 一般に各点 x における Lyapunov 数を調べることは困難である．したがって, その最大値（または最小値）に注目し,

P1 Lyapunov 数の最大値は何か？

P2 Lyapunov 数の最大値を与える点の集合は何か？

という問題を考えていく．

ここで Lyapunov 数は連続関数 $\phi(x) = \log |DT(x)|$ の時間平均

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x)$$

に一致する．実際, 点 x に沿う ϕ の時間平均を考えると,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |DT(T^k x)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |DT^n(x)|\end{aligned}$$

となる．Lyapunov 数を ϕ の時間平均と考えることで, 次の節で与える時間平均と空間平均に関する関係から, Lyapunov 数の最大値に関する問題を ϕ の空間平均の最大値を与える不変測度, maximizing measure の問題に置き換えることができる．

1.2 Maximizing measure

この節では, 力学系をコンパクト距離空間 X 上の連続写像 $T : X \to X$ による力学系 (X,T) に一般化した上で maximizing measure の定義をし, その上の連続関数の時間平均と maximizing measure の関係を与える. 写像 T の反復により変化しない確率測度を扱う.

定義 3. X 上の Borel 確率測度 μ が X の任意の Borel 可測集合 B に対して

$$\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$$

を満たすとき μ を不変測度と呼ぶ.

例 4. $x \in X$ を不動点, $T(x) = x$ とする. このとき, Dirac 測度 δ_x は不変測度である. また $y \in X$ を n-周期点としたとき, 周期軌道の各点に等確率を与える測度 $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{T^k x}$ は不変測度である.

不変測度全体の集合を $M(X,T)$ と表す. このとき, 連続関数 f の時間平均と空間平均の間には

$$\sup_{x\in X}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(x) = \max_{\nu\in M(X,T)}\int f\ d\nu \tag{2}$$

という関係がある [J, Proposition 2.1.].

不変測度の空間 $M(X,T)$ には, 任意の連続関数 f に対して $\nu \mapsto \int f\ d\nu$ を連続にする最弱の位相である weak*位相を考える. $M(X,T)$ は weak*位相でコンパクトであることから, 任意の連続関数に対して最大値を与える不変測度が存在することが従う.

定義 5. 連続関数 f に対して,

$$\max_{\nu\in M(X,T)}\int f\ d\nu = \int f\ d\mu$$

を満たす, すなわち空間平均を最大にする不変測度 μ を f の maximizing measure と呼ぶ.

つまり, f 時間平均の「最大値」は maximizing measure による f の空間平均に一致する. (2) 関係から, 前節で扱った円周上の力学系 $(\mathbb{T},T)$ の Lyapunov 数の最大値は, 連続関数 $\phi(x) = \log|DT(x)|$ の空間平均の最大値に置き換えられることがわかる. ϕ に対する maximizing measure は特に Lyapunov maximizing measure と呼ばれる.

また, 時間平均と空間平均がほとんど全ての点で一致する不変測度はエルゴード測度と呼ばれ, 次のように定義される.

定義 6. 不変測度 $\mu \in M(X,T)$ に対して, 任意の $f \in L^1(\mu)$ が

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) = \int f \ d\mu \quad \mu - a.e. \tag{3}$$

を満たすとき μ はエルゴード的である, またはエルゴード測度であるという.

このことから, 連続関数 f がエルゴード的な f-maximizing measure μ を持つ場合, (μ で見て) ほとんど全ての点での時間平均が μ による空間平均, つまり時間, 空間平均の最大値になることがわかる. この場合, 時間平均を最大にする点の様子はエルゴード的な maximizing measure のサポートを調べることによって知ることができる.

サポートはその不変測度で「見える」集合を表し, 不変測度 μ のサポートは

$$\text{supp } \mu = \bigcap_{\mu(C)=1,\ C \text{ closed}} C$$

と定義される. ここで $S = \text{supp } \mu$, B を Borel 可測集合とすると,

$$\mu(B) = \mu(B \cap S) + \mu(B \setminus S) = \mu(B \cap S)$$

となり, S との共通部分だけが「見える」. 例えば, サポートが不動点 $\{x\}$ となる不変測度は Dirac 測度 δ_x のみであり, サポートが周期軌道 $\{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\}$ となる不変測度も $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x}$ のみである.

さらに任意の不変測度はエルゴード測度に分解される (エルゴード分解定理 [W, Section 6.2]) という性質を持ち, 例えば 2 つのエルゴード測度 μ_1, μ_2 の凸結合, $t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ $(t \in (0,1))$, は不変測度となる. 連続関数 f に対して, 2 つのエルゴード測度が f-maximizing measure であるとき, それらの凸結合で表される不変測度も f-maximizing measure となる. また 逆も成り立ち, 不変測度が f-maximizing measure であるとき, それを分解するエルゴード測度も f-maximizing measure となる. つまり, f-maximizing measure が一意に存在する場合, それはエルゴード測度であり, 複数の f-maximizing measure が存在する場合には, エルゴード測度の数が問題となる.

以上のことから, 前節で扱った円周上の力学系 $(\mathbb{T}, T)$ と連続関数 $\phi(x) = \log|DT(x)|$ の時間平均である Lyapunov 数に関する問題は, 次の maximizing measure 関するエルゴード最適化問題の特別な場合であることがわかる.

問題 7 (エルゴード最適化問題)**.** X 上の連続関数 f に対して

P'1 f の maximizing measure は何か？(一意に存在するのか？)

P'2 f の maximizing measure はどのような集合にサポートされているか？

次の章ではこのエルゴード最適化問題についての先行研究を紹介する.

2　Previous Results

「多くの」連続関数および「多くの」円周上の expanding map に対して, maximizing measure の一意性が成り立つことが知られている [J, JM].

2.1　Maximizing Measure の generic な性質

コンパクト距離空間 X 上の連続関数の集合 $C(X)$ に一様ノルム $\|\phi\| = \sup_{x\in X} |\phi(x)|$ による C^0 位相を与えた空間を考える. 多くの連続関数に共通する性質を generic な性質と呼び, 次のように定義される.

定義 8. ある開かつ稠密な集合の可算無限個の共通部分 $\mathcal{R}$ に対し, 任意の連続関数 $f \in \mathcal{R}$ が性質 P を満たすとき性質 P は generic であるという.

開かつ稠密な集合の可算無限個の共通部分は残留集合と呼ばれる. generic な性質 P_1, P_2 に対して, P_1 かつ P_2 も generic な性質である. したがって, generic な性質の有限個の重ね合わせも generic である.

「性質が generic である」ことの定義は, $C(X)$ に限らず位相空間の元に対する性質について同様に定義される. 例えば, 実数 $\mathbb{R}$ の通常の位相において「無理数である」ことは generic であり, 「有理数である」ことは generic ではない.

Maximizing measure に対して次の 3 つの generic な性質が知られている.

定理 9. [J, BJ, B] コンパクト距離空間 X 上の連続写像 T による力学系を考える. このとき, ある $C(X)$ 残留集合 $\mathcal{R}$ が存在して, 任意の連続関数 $f \in \mathcal{R}$ に対して,

G1 f-maximizing measure が一意に存在し (Jenkinson),

G2 サポートが全体で (Bousch and Jenkinson) ,

G3 エントロピー零である (Brémont).

エントロピーは不変確率測度に対して定まり, その不変測度から見た力学系の複雑さを表す指標である. 例えばサポートが不動点や周期軌道となる単純な場合は, 不変測度のエントロピーは零となる.

2.2　円周上の Expanding Map の generic な性質

円周上の C^1 級写像の集合を $\mathcal{T}^1$ とし, 距離

$$d_1(T,S) = \max_{x\in\mathbb{T}}\{|T(x)-S(x)|, |DT(x)-DS(x)|\} \quad (T,S\in\mathcal{T}^1)$$

によによる C^1 位相を考える.

円周上の expanding map に対して, 連続関数の場合と同様に次の 3 つの generic な性質が知られている. expanding map 全体の空間を $\mathcal{E}^1$ とする.

定理 10. [JM] ある $\mathcal{E}^1$ の残留集合 $\mathcal{R}$ が存在して, 任意の expanding map $T\in\mathcal{R}$ に対して,

G1 Lyapunov maximizing measure が一意に存在し,

G2 サポートは全体で,

G3 エントロピー零である.

3　Main Results

前章から, maximizing mesure および Lyapunov maximizing measure の generic な性質は **G1** 一意性, **G2** サポートが全体, **G3** エントロピーが零の 3 つであることがわかった. 一方 generic な性質は, 無理数の例からも想像されるように, 摂動によって崩れる可能性がある. これから述べる主定理は, それらの generic な性質が関数や写像の摂動によって崩れ, 全く対象的な性質が現れるという結果である.

主定理. コンパクト距離空間 X 上の連続写像 T による力学系を考える. $M(X,T)$ が一点集合ではないとし, $M_e(X,T)$ が弧連結であるとする. このとき, ある $C(X)$ の稠密な部分集合 $\mathcal{D}$ が存在し, 任意の連続関数 $f\in\mathcal{D}$ に対して,

D1 非可算個のエルゴード的な f-maximizing measure が存在する.

ここで $M_e(X,T)$ は X 上のエルゴード測度の集合である. 弧連結の仮定は例えば、円周上の expanding map や記号力学系に対して満たされている. エルゴード測度の集合 $M_e(X,T)$ が弧連結であるとは, 任意のエルゴード測度 μ,ν に対して, ある区間 $[0,1]$ 上の像への同相写像 $f:[0,1]\to M_e(X,T)$ が存在して, $f(0)=\mu$ かつ $f(1)=\nu$ を満たすことである.

さらにこの主定理を応用して, 円周上の expanding map についても同様の結果が得られた.

定理 A. ある $\mathcal{E}^1$ の稠密な部分集合 $\mathcal{D}$ が存在し, 任意の expanding map $T\in\mathcal{D}$ に対して,

D1 非可算個のエルゴード的な Lyapunov maximizing measure が存在し,

D2 それらすべてのエントロピーは正である.

エントロピーが正であることは, その不変測度が周期軌道のような単純な軌道ではなく, 複雑な軌道にサポートされていることを示唆する.

参考文献

[BJ] Thierry Bousch and Oliver Jenkinson, Cohomology classes of dynamically non-negatice C^k functions, Inventiones Mathematicae, vol.**148**, 2008, pp207-217.

[B] Julien Brémont, Entropy and maximizing measures of generic continuous functions, Comptes Rendus Mathematique, vol.**346**, 2008, pp.199-201.

[J] Oliver Jenkinson, Ergodic Optimization, Discrete and Continuous Dynamical Systems vol. **15**, 2006, pp.197-224.

[JM] Oliver Jenkinson and Ian D. Morris, Lyapunov optimizing measures for C^1 expanding maps of the circle, Ergodic Theory of Dynamical Systems, vol.**28**, 2008, pp.1849-1860.

[W] Peter Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics **79**, Springer, New York, 1982.