南雲・佐藤モデルにノイズが加えられたシステムの漸近的周期性

中村　文彦 (Fumihiko NAKAMURA)
北海道大学大学院理学院数学専攻　博士課程 2 年

1　イントロダクション

南雲・佐藤 (NS) モデル [1] と呼ばれている区分的に非拡大的線形写像

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha,\beta}(x) &= \alpha x + \beta \ (\mathrm{mod}\ 1), \quad (0 < \alpha, \beta < 1), \\
&= \begin{cases} \alpha x + \beta & (\alpha x + \beta < 1 \text{ のとき}) \\ \alpha x + \beta - 1 & (\alpha x + \beta \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

は，カイヤニエロの神経方程式 [2] を単純化したモデルとして知られ，脳内の単一のニューロンの発火現象を記述するとして研究されている．この写像から作られる $[0,1]$ 上の力学系は，ほとんどすべてのパラメータ (α,β) に対して，周期的なふるまいをすることが知られている．またこの写像は $\alpha+\beta>1$ のときに，ただ一つの不連続点を $[0,1]$ 内に持つが，この不連続点が，図 1 にみられる NS モデルの複雑な周期構造を導く要因となる．この周期構造は，$S_{\alpha,\beta}$ が周期点を持つパラメータ領域を周期数別に分類したもので，ファレイ構造 [3] と呼んでいる. この周期構造の重要な性質は，m 周期点をもつパラメータ領域と n 周期点を持つパラメータ領域の間には，$(m+n)$ 周期点を持つパラメータ領域が存在する，ということである．これらの内容は 2 章で述べるが，詳細は [3] に書かれている．

本講演では，NS モデルにノイズが加えられた以下のランダム力学系を考察する．

$$
x_{t+1} = \alpha x_t + \beta + \xi_t \quad (\mathrm{mod}\ 1) \quad \text{for} \quad (\alpha,\beta) \in (0,1)^2, \tag{2}
$$

ただし，$\{\xi_t | t \geq 0\}$ は $[0,\theta]$ 上の一様分布に従う独立な確率変数である $(0<\theta<1)$．そしてシステム (2) から生成されるマルコフ作用素 [4] に対する二つの重要な漸近的な性質「**漸近的な周期性 (asymptotic periodicity)**」と「**漸近的な安定性 (asymptotic stability)**」を議論する．マルコフ作用素は力学系の漸近的な挙動を記述するものとして知られている．これらの内容は主結果と共に 3 章で述べる．

2　南雲・佐藤モデルのファレイ構造

ここではまず，[3] 内で定義されたファレイ構造について紹介する．これは $S_{\alpha,\beta}$ が周期点をもつパラメータ領域を周期数別に分類したもので，図 1 に見られるような，ファレイ数列（付録参照）に基づく層構造を持っている．

自然数 n に対し，$Pr(n) := \{l < n \mid GCD(n,l) = 1\}$ とする．各自然数 n に対して，ファレイ構造を以下で定義する．E を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とし，$\{D_{n,l}\}_{n\in\mathbb{N}, l\in Pr(n)}$ を集合 E の部分集合族で，以下の性質を満たすものとする．各 $\alpha \in \pi_1(E)$ に対して, ある実数 $B^U_{n,l}(\alpha)$，$B^L_{n,l}(\alpha)$ が存在し，

$$
\pi_2\left(D_{n,l} \cap \pi_1^{-1}\{\alpha\}\right) = \left[B^L_{n,l}(\alpha), B^U_{n,l}(\alpha)\right). \tag{3}
$$

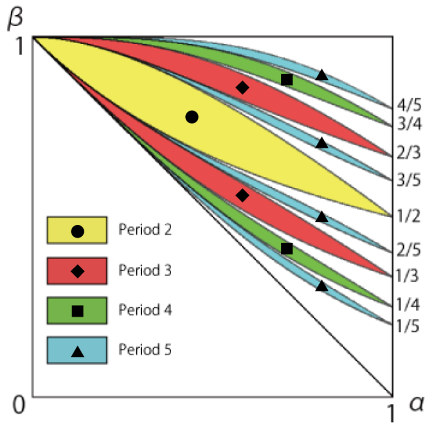

図 1　ファレイ構造：$S_{\alpha,\beta}$ が周期数 2 から 5 までの周期点を持つパラメータ領域

と書ける．ただし，$\pi_1(\alpha,\beta)=\alpha$, $\pi_2(\alpha,\beta)=\beta$ である．また，任意の $\alpha\in\pi_1(E)$ に対して $B^U_{n,l}(\alpha)<B^L_{n',l'}(\alpha)$ が成り立つとき，$D_{n,l}\prec D_{n',l'}$ と書くことにする．ここでは，二つのパラメータをもつ $[0,1]$ 上の変換 $\{T_{\alpha,\beta}:[0,1]\to[0,1]\}_{(\alpha,\beta)\in E}$ を考える．

定義 2.1 $\{T_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$ が E 内に**ファレイ構造 (Farey structure)** を持つとは，自然数 n と $l\in Pr(n)$ に対応したあるパラメータ集合族 $\{D_{n,l}\}_{n\in\mathbb{N},l\in Pr(n)}\subset E$ が存在して，以下を満たすときをいう．

(i) 任意の自然数 n と $l\in Pr(n)$ に対して，$Leb(D_{n,l})>0$,

(ii) 各自然数 n と $l\in Pr(n)$ に対して，$(\alpha,\beta)\in D_{n,l}$ のとき，$T_{\alpha,\beta}$ は周期数 n の周期点を持つ，

(iii) 任意の自然数 n に対し，$D_{n+1,1}\prec D_{n,1}$，$D_{n,n-1}\prec D_{n+1,n}$ が成り立つ．また，$nl'-n'l=1$ を満たす自然数 n,n' と $l\in Pr(n), l'\in Pr(n')$ に対し，もし $D_{n,l}\prec D_{n',l'}$ ならば，$D_{n,l}\prec D_{n+n',l+l'}\prec D_{n',l'}$ が成り立つ．

$S_{\alpha,\beta}$ がファレイ構造をもつことを示すために，以下のように集合族 $\{D_{n,l}\}_{n\in\mathbb{N},l\in Pr(n)}$ と二つの関数 $B^U_{n,l}(\alpha)$，$B^L_{n,l}(\alpha)$ を与える．

$$D_{n,l}=\{(\alpha,\beta)\in\ (0,1)^2\mid B^L_{n,l}(\alpha)\le\beta<B^U_{n,l}(\alpha)\},\tag{4}$$

$$B^U_{n,l}(\alpha)=(1-\alpha)\left(\frac{1}{1-\alpha^n}\sum_{m=1}^{n-1}k_m\alpha^m+1\right),\tag{5}$$

$$B^L_{n,l}(\alpha)=(1-\alpha)\left(\frac{1}{1-\alpha^n}\sum_{m=1}^{n-1}k_m\alpha^m+1-\frac{\alpha^{n-1}-\alpha^n}{1-\alpha^n}\right),\tag{6}$$

ただし，

$$k_m:=\left[\frac{(m+1)l}{n}\right]-\left[\frac{ml}{n}\right]\quad\text{for}\quad m\in\mathbb{Z}.\tag{7}$$

これら (4)，(5)，(6)，(7) によって次の命題が示される．

命題 2.2 *([3], Theorem 4.1)* $\{S_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in(0,1)^2}$ は $(0,1)^2$ 内にファレイ構造をもつ．

注意 2.3 $(\alpha,\beta)\in D_{n,l}$ のとき，関数 $S_{\alpha,\beta}$ がもつ n 個の周期点の集合は以下で与えられる．

$$\mathrm{Per}_n(S_{\alpha,\beta})=\left\{\frac{\beta}{1-\alpha}-A_i(\alpha)\;\middle|\; i=0,\cdots,n-1\right\},\tag{8}$$

ただし，$i=0,1,\cdots,n-1$ に対して，

$$A_i(\alpha)=\frac{1}{1-\alpha^n}\left(\sum_{m=0}^{i-1}k_m\alpha^{i-m-1}+\sum_{m=i}^{n-1}k_m\alpha^{n+i-m-1}\right).\tag{9}$$

である．

3 ノイズが加えられたシステムの漸近的性質

$(X,\mathcal{A},\mu)$ を測度空間とし，線形作用素 $P:L^1(X)\to L^1(X)$ をマルコフ作用素（Markov operator）とする。すなわち P は任意の非負 L^1 関数に対し，(i)$Pf\geq 0$, (ii)$||Pf||=||f||$ を満たす．また，$D=\{f\in L^1\mid f\geq 0, ||f||=1\}$ とする． 尚，これらの準備の詳細は [4] に書かれている．

定義 3.1 $\{P^t\}$ が**漸近的に安定的** *(asymptotically stable)* であるとは，ある関数 $f_*\in D$ が一意に存在し，任意の関数 $f\in D$ に対して，$\lim_{t\to\infty}||P^tf-f_*||=0$ かつ $Pf_*=f_*$ が成り立つときをいう．

定義 3.2 $\{P^t\}$ が**漸近的に周期的** *(asymptotically periodic)* であるとは，ある自然数 r と 2 つの非負関数列 $g_i\in D$, $k_i\in L^\infty$, $(i=1,\cdots,r)$, 作用素 $Q:L^1\to L^1$ が存在して，任意の $f\in L^1$ に対して, Pf は

$$Pf(x)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(f)g_i(x)+Qf(x),\tag{10}$$

と書けるときをいう．ただし

$$\lambda_i(f)=\int_X f(x)k_i(x)\mu(dx).\tag{11}$$

であり，更に関数 g_i と作用素 Q が以下の性質を満たす．

(i) $i\neq j$ なるすべての $i,j\in\{1,\cdots,r\}$ に対し $g_i(x)g_j(x)=0$ が成立;

(ii) 各自然数 i に対し，ある自然数 $\rho(i)$ が一意に存在し，$Pg_i=g_{\rho(i)}$ が成立．更に $i\neq j$ なる i,j に対して $\rho(i)\neq\rho(j)$ が成立;

(iii) 任意の関数 $f\in L^1$ に対して，$t\to\infty$ のとき $||P^tQf||\to 0$ が成立.

注意 3.3 $\{P^t\}$ が漸近的に安定的であることは，$\{P^t\}$ が $r=1$ で漸近的に周期的であることと同値である．

次に，$[0,1]$ 上のランダム過程

$$x_{t+1}=S(x_t)+\xi_t\pmod 1,\tag{12}$$

を考える．ただし，$S:[0,1]\to[0,1]$ は可測変換で，$\xi_0,\xi_1,\cdots$ は共通の密度 g を持つ，独立な確率変数列である．このシステムに対するマルコフ作用素 $\overline{P}:L^1([0,1])\to L^1([0,1])$ は次式で与えられる [6]．

$$\overline{P}f(x)=\int_{[0,1]}f(y)\left(\sum_{i=0}^{1}g(x-S(y)+i)\right)dy\quad\text{for}\quad f\in L^1.\tag{13}$$

補題 3.4 *([6], Theorem 2.8)* 上式 *(13)* で与えられるマルコフ作用素 $\overline{P}:L^1([0,1])\to L^1([0,1])$ に対して，$\{\overline{P}^t\}$ は漸近的に周期的である．

ここで今回考察したいランダム力学系 (2) に話を戻す．補題 3.4 より，システム (2) から生成されるマルコフ作用素 $\overline{P}$ に対しても，$\{\overline{P}^t\}$ は漸近的に周期的であることがわかっている．以下の主定理では，加えるノイズの大きさに対して，$\{\overline{P}^t\}$ が $r>1$ (漸近的に周期的) となるための十分条件と $r=1$ (漸近的に安定的) となるための十分条件を与えている．

定理 3.5 *(N)* $\overline{P}$ *をシステム (2) に対するマルコフ作用素 (13) とし，自然数* n *と* $l \in Pr(n)$ *に対し，* $(\alpha,\beta)\in D_{n,l}$ *とする．この時，ある* $[0,1]$ *内の実数* $\theta_*(\alpha,\beta)$ *が存在して，*

(i) もし $\theta \le \theta_*(\alpha,\beta)$ ならば，$r=n>1$，つまり $\{\overline{P}^t\}$ は漸近的に周期的である（周期数 n）．
(ii) もし $\theta > \theta_*(\alpha,\beta)$ ならば， $r=1$，つまり $\{\overline{P}^t\}$ は漸近的に安定的である．

また，$\theta_*(\alpha,\beta)$ は次式で与えられる．

$$\theta_*(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^{n-1}(1-\alpha)^2}{1-\alpha^n}-\beta+B^L_{n,l}(\alpha) \tag{14}$$

ここでは証明は省略するが，証明のキーとなった重要な補題を以下に記す．

補題 3.6 $n\in\mathbb{N}$，$l\in Pr(n)$ に対し，$(\alpha,\beta)\in D_{n,l}$ とする．$i=0,\cdots,n-1$ に対して，n 個の区間 G_i を，

$$G_i=\left[\frac{\beta}{1-\alpha}-A_i(\alpha),\ \frac{\beta+\theta}{1-\alpha}-A_i(\alpha)\right], \tag{15}$$

と定める．ただし，$A_i(\alpha)$ は式 *(9)* で与えられる．この時, 任意の $i=0,1,\cdots,n-2$，$x\in G_i$，$\xi\in[0,\theta]$ に対しては，$S_{\alpha,\beta}(x)+\xi\in G_{i+1}$ が成り立ち，任意の $x\in G_{n-1}$，$\xi\in[0,\theta]$ に対しては $S_{\alpha,\beta}(x)+\xi\in G_0$ が成り立つ．更に，ある自然数 N が存在し，$t>N$，$a.e.x_0\in[0,1]$ に対して，$x_{t+1}\in\bigcup_{i=0}^{n-1}G_i$ が成り立つ．ただし x_{t+1} はシステム *(2)* によって決められる．

最後に，$\beta=B^U_{n,l}(\alpha)$ のときに対する主張を記す. この仮定 $\beta=B^U_{n,l}(\alpha)$ は，ノイズが加える前の NS モデルでは周期点を持たない場合のパラメータとなっていることを意味している．これまで [3, 4] では数値的に $\alpha=1/2,\beta=B^U_{4,1}(1/2)=17/30,\theta=1/15$ の場合を考察され，また最近ではこの特別なパラメータ $(1/2,17/30)$ に対してのみ，漸近的に安定的となることが [8] で証明されている．よって次の定理 3.7 はこれらの主張を一般化したものにもなっている．

定理 3.7 *(N)* $\overline{P}$ *をシステム (2) に対するマルコフ作用素 (13) とし，自然数* n *と* $l\in Pr(n)$ *に対し，*(α,β) *を* $\beta=B^U_{n,l}(\alpha)$ *を満たすように与える．このとき任意の* $\theta>0$ *に対して，*$\{\overline{P}^t\}$ *は漸近的に安定的である．*

付録 A　ファレイ数列

第 n ファレイ数列 F_n とは，分母が n 以下で，0 以上 1 以下のすべての既約分数を小さい順から並べてできる数列である．以下に F_5 までを例示するが，ファレイ数列に関する諸性質は [7] を参照されたい．

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$F_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}$$

参考文献

[1] Nagumo J, Sato S. On a response characteristic of a mathematical neuron model. Kybernetik.1972;10(3):155164.

[2] Caianiello ER. Outline of a theory of thought-processes and thinking machines. J Theor Biol.1961;1(2):204235.

[3] Nakamura, Fumihiko. "Periodicity of non-expanding piecewise linear maps and effects of random noises." Dynamical Systems 30.4 (2015): 450-467.

[4] Lasota, Andrzej, and Michael C. Mackey. Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics. Vol. 97. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Provatas, Nicholas, and Michael C. Mackey. "Noise-induced asymptotic periodicity in a piecewise linear map." Journal of statistical physics 63.3-4 (1991): 585-612.

[6] Iwata, Yukiko, and Tomohiro Ogihara. "Random perturbations of non-singular transformations on [0, 1]." Hokkaido Mathematical Journal 42.2 (2013): 269-291.

[7] Apostol, Tom M. Modular functions and Dirichlet series in number theory. Vol. 2. New York: Springer, 1976.

[8] Kaijser, Thomas. "Stochastic perturbations of iterations of a simple, non-expanding, nonperiodic, piecewise linear, interval-map." arXiv preprint arXiv:1606.00741 (2016).