1次元複素トーラス上の安定ベクトル束の成す完全三角系列について

千葉大学大学院理学研究科　小林和志

ホモロジー的ミラー対称性予想はミラー対称性の圏論的定式化として提案された予想であり, あるシンプレクティック多様体上で定義されるラグランジュ部分多様体から成る深谷圏の導来圏と, そのミラー双対な複素多様体上で定義される連接層の成す導来圏が三角圏として圏同値となることを主張する [6]. 特に, この連接層の成す導来圏は正則ベクトル束の成すある DG 圏から得られる三角圏と等価であることが知られている. ここではミラー対として 2 次元シンプレクティックトーラス T^2 と 1 次元複素トーラス $\check{T}^2$ のペアをとり, T^2 上で定義されるアファインラグランジュ部分多様体, すなわち, 傾き $\frac{a}{n} \in \mathbb{Q}$ の直線 (n と a は互いに素)$\mathcal{L}_{\frac{a}{n}}$ に対応する階数 n, 次数 a の正則ベクトル束 $E(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}})$ を考える (この $\mathcal{L}_{\frac{a}{n}}$ と $E(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}})$ はそれぞれ本文中の $\mathcal{L}_{(\frac{a}{n},\frac{p}{n})}$, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ に対応するものである). このとき, この正則ベクトル束 $E(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}})$ は安定である. このような状況下において安定ベクトル束 $E(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}})$ の成す DG 圏を構成し, そこから得られる三角圏の中で完全三角系列

$$\cdots \longrightarrow E(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}}) \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow E(\mathcal{L}_{\frac{b}{m}}) \xrightarrow{\psi} TE(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}}) \longrightarrow \cdots$$

を考える. ただし, T はシフト関手, $C(\psi)$ は射 $\psi \neq 0$ の写像錐を表し, ここでは $\mathrm{dimExt}^1(E(\mathcal{L}_{\frac{b}{m}}), E(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}}))=1$ の場合のみ考えることとする. 一方で, 楕円曲線上の直既約な正則ベクトル束は Atiyah によって分類されており, それは「楕円曲線上の直既約な正則ベクトル束の同型類の成す集合は $\mu \in \check{T}^2 = \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ によってパラメトライズされる ($\tau \in \mathbb{H}$)」ということを主張している [1]. したがって, $\mu \in \check{T}^2$ に対応する $E(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}})$ の同型類を $[E(\mathcal{L}_{\frac{a}{n}})_\mu]$ と書いた場合, $C(\psi)$ は階数 $m+n$, 次数 $a+b$ の正則ベクトル束であるから, Atiyah による分類結果を用いるとある $\mu \in \check{T}^2$ が存在して $[C(\psi)] = [E(\mathcal{L}_{\frac{a+b}{m+n}})_\mu]$ となることが予想される. ここでは, 同型射を具体的に構成することによりこの値 $\mu \in \check{T}^2$ を決定し, また, これらの正則ベクトル束に対応するラグランジュ部分多様体 $\mathcal{L}_{\frac{a}{n}}$, $\mathcal{L}_{\frac{b}{m}}$, $\mathcal{L}_{\frac{a+b}{m+n}}$ の成す深谷圏の積構造とその同型射との関係についても議論する. この一連の議論において, テータ関数が重要な役割を果たす.

1　ラグランジュ部分多様体に付随して定まる正則ベクトル束

まず, ミラー対 $(T^2, \check{T}^2)$ について簡単に説明しておく. 実 2 次元トーラス $\check{T}^2$ の被覆空間 $\mathbb{R}^2$ の座標を (x,y) とし, $x \sim x+2\pi$, $y \sim y+2\pi$ と同一視することによって (x,y) を $\check{T}^2$ の点と見なすことができる. また, 十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ を 1 つ固定し,

$$O_{ij} := \left\{ (x,y) \in \check{T}^2 \;\middle|\; \frac{2}{3}\pi(i-1) - \varepsilon_0 < x < \frac{2}{3}\pi i + \varepsilon_0,\ \frac{2}{3}\pi(j-1) - \varepsilon_0 < y < \frac{2}{3}\pi j + \varepsilon_0 \right\}$$

と定める. ここで $i,j = 1,2,3$ である. この O_{ij} は $\mathbb{R}^2$ の開集合と見なすことができるので, O_{ij} の局所座標を $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ で定める. さらに, $\check{T}^2$ の複素座標を $\tau \in \mathbb{H}$ を用いて $z = x + \tau y$ と定義す

る．この $\check{T}^2 \cong \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})$ に対し, 次のような複素化されたシンプレクティック形式 ω を持つ $\check{T}^2$ の双対トーラス (T^2,ω) を考える．

$$\omega = \frac{1}{\tau}dx\wedge dy.$$

ただし, 混同する恐れはないと思われるので, T^2 の局所座標も $\check{T}^2$ の場合と同じ (x,y) を用いて書くこととする．

上記の設定のもとで, T^2 上で定義される (アファイン) ラグランジュ部分多様体に付随して定まる $\check{T}^2$ 上の正則ベクトル束について説明する．ただし, 実 $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M,ω) のラグランジュ部分多様体 L とは, $\mathrm{dim}L = n$ かつ $\omega|_L = 0$ を満たすようなもののことである．次のような写像 $s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を考える．

$$s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}(x) := \frac{a}{n}x+\frac{\mu}{n} = \frac{a}{n}x+\frac{1}{n}(p+q\tau).$$

ここで, $n\in\mathbb{N}$ と $a\in\mathbb{Z}$ は互いに素で, $\mu = p+q\tau\in\mathbb{C}$ に関して $p,q\in\mathbb{R}$ であり, この $s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ は $\mathbb{R}^2$ 内の直線の式に便宜上複素数 $\frac{q}{n}\tau$ を付加した形になっている．このとき, $y=\frac{a}{n}x+\frac{p}{n}$ のグラフは $\mathbb{R}^2$ におけるラグランジュ部分多様体の例を与える．これを $\mathcal{L}_{(\frac{a}{n},\frac{p}{n})}$ と書く．さらに, 被覆写像 $\pi:\mathbb{R}^2\to T^2$ による $\mathcal{L}_{(\frac{a}{n},\frac{p}{n})}$ の像 $\pi(\mathcal{L}_{(\frac{a}{n},\frac{p}{n})})$ は T^2 におけるラグランジュ部分多様体の例を与える．以降, この $\pi(\mathcal{L}_{(\frac{a}{n},\frac{p}{n})})$ も $\mathcal{L}_{(\frac{a}{n},\frac{p}{n})}$ と書く．この $s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ に対し, $\check{T}^2$ 上で以下のような階数 n, 次数 a の正則ベクトル束 $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ が定まる．まず, U, $V\in GL(n;\mathbb{C})$ を

$$U := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1}\end{pmatrix},\ V := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & 0\end{pmatrix}$$

で定める．ただし, ω は 1 の n 乗根である．この U, V を用いて, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ の切断 $\psi_{(i,j)}:O_{ij}\to\mathbb{C}^n$ に対する変換関数を, $O_{3j}\cap O_{1j}$ 上において

$$\psi_{(3,j)}\big|_{O_{3j}\cap O_{1j}} = e^{\frac{a}{n}\mathbf{i}y}V\ \psi_{(1,j)}\big|_{O_{3j}\cap O_{1j}},$$

$O_{i3}\cap O_{i1}$ 上において

$$\psi_{(i,3)}\big|_{O_{i3}\cap O_{i1}} = U^{-a}\ \psi_{(i,1)}\big|_{O_{i3}\cap O_{i1}}$$

と定義する．ここで, $U^{-a} := (U^{-1})^a$ である．また, $O_{1j}\cap O_{2j}$, $O_{2j}\cap O_{3j}$, $O_{i1}\cap O_{i2}$, $O_{i2}\cap O_{i3}$ 上における変換関数は自明であるとする．このとき,

$$\psi_{(3,3)}\big|_{O_{33}\cap O_{11}} = U^{-a}\ \psi_{(3,1)}\big|_{O_{33}\cap O_{11}} = \left(U^{-a}\right)\left(e^{\frac{a}{n}\mathbf{i}y}V\right)\psi_{(1,1)}\big|_{O_{33}\cap O_{11}}$$

と定義すればコサイクル条件が満たされていることが確認できる．さらに, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ 上における接続 $D_{\frac{a}{n}}$[1] を

$$D_{\frac{a}{n}} = d+A := d-\frac{\mathbf{i}}{2\pi}s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}(x)dy\cdot I = d-\frac{\mathbf{i}}{2\pi}\left(\frac{a}{n}x+\frac{\mu}{n}\right)dy\cdot I$$

と定めると, これは変換関数の定義と両立していることが分かる．ただし, I は n 次単位行列である．また, 曲率形式 $F=dA+A\wedge A$ について, その (0,2)-part が消えていることから $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ が正則ベクトル束であることが従い, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ の次数が a となることは直接計算することにより確認できる．

[1] 正確には $D_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ と書くべきかもしれないが, そうした場合, 第 2 章で定義される微分作用素 $d_{(\frac{a}{n},\frac{b}{m})}$ の表記が煩雑になるため, あえて $D_{\frac{a}{n}}$ と書くことにした．

2　正則ベクトル束の成す DG 圏

ここでは, 第 1 章で定義した正則ベクトル束 $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ の成す DG 圏 $DG_{\check{T}^2}$ について考察する. ただし, DG 圏とは, 次のようなもののことである.

定義 2.1. 圏 $\mathcal{C}$ において, 対象の成すクラスを $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ から $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ への射の成す集合を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ とする. $\mathbb{Z}$ 次数付き加法圏, あるいは $\mathbb{Z}$ 次数付き加法圏の充満部分圏 $\mathcal{C}$ において, 任意の X, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $i \in \mathbb{Z}$ に対して加法群の写像 $d^i_{XY} : \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}^{i+1}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ が与えられていて, $d^{i+1}_{XY} \circ d^i_{XY} = 0$, $d^{i+j}_{XZ}(g \circ f) = d^j_{YZ}(g) \circ f + (-1)^j g \circ d^i_{XY}(f)$ $(f \in \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g \in \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{C}}(Y,Z))$, $d^0_{XX}(id_X) = 0$ を満たすとき, $\mathcal{C}$ を DG 圏と呼ぶ.

まず, DG 圏 $DG_{\check{T}^2}$ の対象は $s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})} = (E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, D_{\frac{a}{n}})$ であり [2], 射の成す空間 $DG_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$ は

$$DG_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) := \Gamma(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) \otimes_{C^\infty(\check{T}^2)} \Omega^{0,*}(\check{T}^2)$$

と定義する. ここで, $\Gamma(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$ は束準同型 $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})} \to E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}$ の成す空間であり, $\Omega^{0,*}(\check{T}^2)$ は $\check{T}^2$ 上における反正則な微分形式の成す空間である. 射の空間 $DG_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$ における次数を $\Omega^{0,*}(\check{T}^2)$ の次数として定義することにより, $DG_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$ は $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間となる.

$$DG_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) = \oplus_{r \in \mathbb{N}\cup\{0\}} DG^r_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}).$$

また, $\psi \in DG^r_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$ は局所的にフーリエ展開して書くことができる. さらに, 微分作用素 $d_{(\frac{a}{n},\frac{b}{m})} : DG^r_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) \to DG^{r+1}_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$ を $d_{\frac{a}{n}} := 2D^{(0,1)}_{\frac{a}{n}}$ を用いて

$$d_{(\frac{a}{n},\frac{b}{m})}(\psi) := d_{\frac{b}{m}}\psi - (-1)^r \psi d_{\frac{a}{n}}, \quad \psi \in DG^r_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$$

と定め, 積構造 $m : DG_{\check{T}^2}(s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}, s_{(\frac{c}{l},\frac{\eta}{l})}) \otimes DG_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) \to DG_{\check{T}^2}(s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, s_{(\frac{c}{l},\frac{\eta}{l})})$ を束準同型の合成, 及び反正則な微分形式の wedge 積をとることによって定める. このとき, $d_{(\frac{a}{n},\frac{b}{m})}$ と m はライプニッツ則を満たす. したがって $DG_{\check{T}^2}$ は DG 圏となる.

以下, $d_{(\frac{a}{n},\frac{b}{m})}$ による r 次のコホモロジー群を $H^r(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$ と書く. 特に, 0 次のコホモロジー群 $H^0(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})})$ は $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ と $E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}$ の間の正則写像の成す空間である. 一般的に, 次の命題が成り立つ.

命題 2.2. 2 つの正則ベクトル束 $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\nu}{n})}$ に対し, $\dim H^0(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\nu}{n})}) = 1$ となることと $\mu \equiv \nu \pmod{2\pi(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})}$ となることは同値であり, それ以外の場合は $\dim H^0(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\nu}{n})}) = 0$ となる. さらに, $\dim H^0(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\nu}{n})}) = 1$ のとき, $H^0(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\nu}{n})})$ における非自明な正則写像は同型 $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})} \cong E_{(\frac{a}{n},\frac{\nu}{n})}$ を与える.

命題 2.3 ([8], p.179)**.** 2 つの正則ベクトル束 $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\nu}{n})}$ に対し, $bn - am > 0$ であれば

$$\dim H^0(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) = bn - am,\ \dim H^1(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) = 0$$

となり, $bn - am < 0$ であれば

$$\dim H^0(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) = 0,\ \dim H^1(E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}, E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}) = am - bn$$

となる.

---

[2] $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ は $s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ に付随して定義されているので, しばしば $DG_{\check{T}^2}$ の対象をこのように書く.

命題 2.2 において, 特に正則写像 $\Phi : E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})} \to E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ は局所的に $\Phi = c \cdot I$ $(c \in \mathbb{C})$ の形に書けるので, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ は単純であり, 従って直既約である. 一方ベクトル束に関しては安定性という概念があり, ベクトル束 E が安定であるとは, 任意の真部分束 $F \subset E$ に対して $\frac{\mathrm{degree}F}{\mathrm{rank}F} < \frac{\mathrm{degree}E}{\mathrm{rank}E}$ が成り立つことを言う. 特に, 楕円曲線上で定義される直既約ベクトル束 E に対しては, $\mathrm{rank}E$ と $\mathrm{degree}E$ が互いに素であることと安定であることが同値であることが知られている ([8], p.178 参照). したがって, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ は安定である.

3 安定ベクトル束 $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ の成す完全三角系列

この章では, 安定ベクトル束 $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ の成す完全三角系列について考える. 一般的に, DG 圏 (A_∞ 圏) が与えられた場合にそこから三角圏を構成する方法があるため [2], 第 2 章で定義した DG 圏 $DG_{\check{T}^2}$ から三角圏 $Tr(DG_{\check{T}^2})$ を構成することができる. この $Tr(DG_{\check{T}^2})$ において, 完全三角系列

$$\cdots \longrightarrow E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})} \longrightarrow C([\psi]) \longrightarrow E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})} \xrightarrow{[\psi]} TE_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})} \longrightarrow \cdots$$

であって ($\frac{a}{n} < \frac{b}{m}$, $\mu = p + q\tau$, $\nu = s + t\tau$), $\mathrm{dimExt}^1(E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}) = 1$ となる場合を考える. ただし, T はシフト関手, $[\psi] \in \mathrm{Ext}^1(E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}) = H^1(E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})})$ は非自明であり, $C([\psi])$ は射 $[\psi]$ の写像錐

$$C([\psi]) := E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})} \oplus E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}, \quad d_{C([\psi])} := \begin{pmatrix} d_{\frac{a}{n}} & [\psi] \\ 0 & d_{\frac{b}{m}} \end{pmatrix}$$

を表す. 以降, $[\psi]$ を ψ と書くこととする. 一般的に, $\mathrm{dimExt}^1(E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}) = 1$ ($\frac{a}{n} < \frac{b}{m}$) と仮定した際, $(n,a) = (1,0)$, $(m,b) = (1,1)$ の場合のみ考えておけば一般性を失わない. これは, 以下のような理由による. まず, $\mathbb{R}^2$ におけるラグランジュ部分多様体 $\mathcal{L}_{(\frac{a}{n},\frac{p}{n})}$ は, $\mathbb{R}^2$ に対する $SL(2;\mathbb{Z})$ の作用

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}x + g_{12}y \\ g_{21}x + g_{22}y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$$

により変形することができ, これは T^2 に対する $SL(2;\mathbb{Z})$ の作用を誘導する. さらに, この作用の拡張, すなわち, 複素数 $q\tau$ も考慮した $SL(2;\mathbb{Z})$ の作用

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{a}{n}x + \frac{\mu}{n} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{a}{n}x + \frac{\mu}{n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$$

を考えることにより $s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ を変形することができ, したがってこれに対応して $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ も $\check{T}^2$ 上で変形される. ゆえに, 命題 2.3 より

$$\mathrm{dimExt}^1(E_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}, E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}) = bn - am = 1$$

であるので, 行列

$$\begin{pmatrix} b-a & n-m \\ -a & n \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$$

を考えれば $s_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ は $s_{(0,\mu)}$ に, $s_{(\frac{b}{m},\frac{\nu}{m})}$ は $s_{(1,\nu)}$ に移されることが確認できる. したがって, 以下では次のような完全三角系列を考える.

$$\cdots \longrightarrow E_{(0,\mu)} \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow E_{(1,\nu)} \xrightarrow{\psi} TE_{(0,\mu)} \longrightarrow \cdots \tag{1}$$

ここで, Atiyah による楕円曲線上の直既約な正則ベクトル束の分類結果について紹介しておく.

定理 3.1 (Atiyah, 1957, [1])**.** 階数と次数が互いに素であるような直既約正則ベクトル束の同型類の成す集合はもとの楕円曲線と同一視することができる.

この結果と命題 2.2 より, $E_{(\frac{a}{n},\frac{\mu}{n})}$ の同型類の集合は $\mu \in \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})$ でパラメトライズされることが分かる. 今, $C(\psi)$ は階数 2, 次数 1 の正則ベクトル束であるから, Atiyah による分類結果を用いることによりある $\eta = u + v\tau$ が存在して $C(\psi) \cong E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})}$ となることが予想される. 以下, 同型 $C(\psi) \cong E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})}$ を具体的に構成し, $C(\psi) \cong E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})}$ となるような η を決定する.

まず, いつ非自明な正則写像 $\tilde{\phi} : E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})} \to C(\psi)$, $\phi : C(\psi) \to E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})}$ が存在するのかを調べる. (1) に共変コホモロジー的関手 $F := \mathrm{Hom}(E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})}, \cdot\,)$, 反変コホモロジー的関手 $G := \mathrm{Hom}(\,\cdot, E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})})$ を施す. すなわち, 以下の長完全列を得る.

$$\cdots \longrightarrow F(E_{(0,\mu)}) \longrightarrow F(C(\psi)) \longrightarrow F(E_{(1,\nu)}) \xrightarrow{F(\psi)} F(TE_{(0,\mu)}) \longrightarrow \cdots,$$

$$\cdots \longrightarrow G(E_{(1,\nu)}) \longrightarrow G(C(\psi)) \longrightarrow G(E_{(0,\mu)}) \xrightarrow{G(T^{-1}\psi)} G(T^{-1}E_{(1,\nu)}) \longrightarrow \cdots.$$

このとき, 次の補題が成り立つ (証明は [5] 参照).

補題 3.2. $F(\psi) = 0$ ならば $\dim F(C(\psi)) = 1$, $F(\psi) \neq 0$ ならば $F(C(\psi)) = 0$ である.

補題 3.3. $G(T^{-1}\psi) = 0$ ならば $\dim G(C(\psi)) = 1$, $G(T^{-1}\psi) \neq 0$ ならば $G(C(\psi)) = 0$ である.

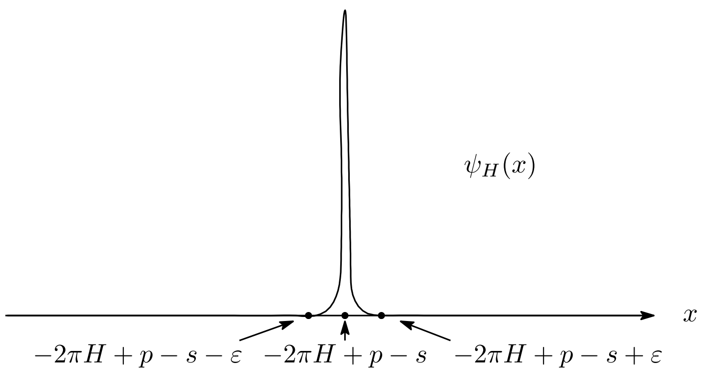
次に, $\psi = \tilde{\psi}(x,y)d\bar{z} \in \mathrm{Ext}^1(E_{(1,\nu)}, E_{(0,\mu)})$ の局所表示について考える. $\tilde{\psi}(x,y)$ は

$$\tilde{\psi}(x,y) = \sum_{H\in\mathbb{Z}} \psi_H(x) e^{\mathbf{i}Hy}$$

の形にフーリエ展開することができ, さらに $E_{(0,\mu)}$ と $E_{(1,\nu)}$ の変換関数による条件から $\psi_H(x)$ は各 $H \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\psi_H(x + 2\pi) = \psi_{H+1}(x) \tag{2}$$

を満たさなければならないことが分かる. ここでは $\mathrm{Ext}^1(E_{(1,\nu)}, E_{(0,\mu)})$ における非自明な射の例として, 以下のような隆起関数をとる. ただし, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ は $0 < \varepsilon < \pi$ を満たすものとする.



この $\tilde{\psi}(x,y)$ は局所的に定義された関数であるが, (2) を用いることにより $\tilde{\psi}(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上定義された関数と見なすことができる. この ψ に対し, シンプレクティック幾何学側では, 各値 $-2\pi H + p - s$

$(H \in \mathbb{Z})$ は $\mathbb{R}^2$ 内におけるラグランジュ部分多様体 (直線) $\mathcal{L}_{(0,p)}$, $\mathcal{L}_{(1,s)}$ 及びそのコピーとして得られる直線の交点の x 座標に対応する.

以上のことを考慮した上で, 以下の定理が成り立つ. ただし, $\theta_\varepsilon(x-(-2\pi H+p-s))$ は積分

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\mathbf{i}}{\tau}(\frac{x^2}{4\pi}+(-\frac{p}{2\pi}+\frac{s}{2\pi}-\frac{q}{2\pi}\tau+\frac{t}{2\pi}\tau+H)x)}\psi_H(x)dx\\ &=e^{\frac{\mathbf{i}}{\tau}(\pi H^2+(-p+s-q\tau+t\tau)H+\frac{q}{2}\tau+\frac{t}{2}\tau-\frac{v}{2}\tau-\frac{\pi}{4})}\theta_\varepsilon(x-(-2\pi H+p-s))\end{aligned}$$

によって定義される関数であり, $x \geq -2\pi H+p-s+\varepsilon$ において $\theta_\varepsilon(x-(-2\pi H+p-s))=1$ を満たすものとする.

定理 3.4. $\dim F(C(\psi))=1$ となることと $\eta \equiv \mu+\nu+\pi+\pi\tau \pmod{2\pi(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})}$ となることは同値であり, このとき $F(C(\psi))$ の基底として局所的に以下のように表される $\tilde{\phi}$ がとれる.

$$\tilde{\phi} := \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{11} & \tilde{\phi}_{12} \\ \tilde{\phi}_{21} & \tilde{\phi}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{11}(x,y) & \tilde{\phi}_{12}(x,y) \\ \tilde{\phi}_{21}(x,y) & \tilde{\phi}_{22}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\phi}_{11}(x,y)\\ &=-\frac{\bar{\tau}-\tau}{2\tau}\mathbf{i}e^{-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}(q-t-\pi)x-\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(p-s-\pi)^2}\sum_{I\in\mathbb{Z}}\sum_{H\in\mathbb{Z}}(-1)^{I+H}e^{-\mathbf{i}(q-t)I-\frac{\pi\mathbf{i}}{\tau}(H-2I-\frac{1}{2})^2}\\ &\quad\times\theta_\varepsilon(x-(-2\pi H+p-s))e^{\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(x+4\pi I-p+s+\pi)^2}e^{\mathbf{i}Iy},\\ &\tilde{\phi}_{12}(x,y)\\ &=-\frac{\bar{\tau}-\tau}{2\tau}e^{-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}(q-t-\pi)x+\frac{\mathbf{i}}{2}y-\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(p-s-\pi)^2-\frac{\mathbf{i}}{2}(q-t)}\sum_{J\in\mathbb{Z}}\sum_{H\in\mathbb{Z}}(-1)^{J+H}e^{-\mathbf{i}(q-t)J-\frac{\pi\mathbf{i}}{\tau}(H-2J-\frac{3}{2})^2}\\ &\quad\times\theta_\varepsilon(x-(-2\pi H+p-s))e^{\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(x+4\pi J-p+s+3\pi)^2}e^{\mathbf{i}Jy},\\ &\tilde{\phi}_{21}(x,y)=e^{\frac{\mathbf{i}}{4\pi}(q-t+\pi)x+\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(p-s+\pi)^2}\sum_{K\in\mathbb{Z}}(-1)^K e^{-\mathbf{i}(q-t)K-\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(x-4\pi K-p+s-\pi)^2}e^{\mathbf{i}Ky},\\ &\tilde{\phi}_{22}(x,y)=-\mathbf{i}e^{\frac{\mathbf{i}}{4\pi}(q-t+\pi)x+\frac{\mathbf{i}}{2}y+\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(p-s+\pi)^2-\frac{\mathbf{i}}{2}(q-t)}\sum_{L\in\mathbb{Z}}(-1)^L e^{-\mathbf{i}(q-t)L-\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(x-4\pi L-p+s-3\pi)^2}e^{\mathbf{i}Ly}.\end{aligned}$$

定理 3.5. $\dim G(C(\psi))=1$ となることと $\eta \equiv \mu+\nu+\pi+\pi\tau \pmod{2\pi(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})}$ となることは同値であり, このとき $G(C(\psi))$ の基底として局所的に以下のように表される ϕ がとれる.

$$\phi := \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(x,y) & \phi_{12}(x,y) \\ \phi_{21}(x,y) & \phi_{22}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\phi_{11}(x,y)=e^{\frac{\mathbf{i}}{4\pi}(q-t-\pi)x+\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(p-s-\pi)^2}\sum_{M\in\mathbb{Z}}(-1)^M e^{-\mathbf{i}(q-t)M-\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(x-4\pi M-p+s+\pi)^2}e^{\mathbf{i}My},\\ &\phi_{12}(x,y)\\ &=\frac{\bar{\tau}-\tau}{2\tau}\mathbf{i}e^{-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}(q-t+\pi)x-\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(p-s+\pi)^2}\sum_{N\in\mathbb{Z}}\sum_{H\in\mathbb{Z}}(-1)^{N+H}e^{-\mathbf{i}(q-t)N-\frac{\pi\mathbf{i}}{\tau}(H-2N+\frac{1}{2})^2}\\ &\quad\times\theta_\varepsilon(x-(-2\pi H+p-s))e^{\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(x+4\pi N-p+s-\pi)^2}e^{\mathbf{i}Ny},\end{aligned}$$

$$\phi_{21}(x,y)=\mathbf{i}e^{\frac{\mathbf{i}}{4\pi}(q-t+\pi)x+\frac{\mathbf{i}}{2}y+\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(p-s-\pi)^2-\frac{\mathbf{i}}{2}(q-t)}\sum_{P\in\mathbb{Z}}(-1)^P e^{-\mathbf{i}(q-t)P-\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(x-4\pi P-p+s-\pi)^2}e^{\mathbf{i}Py},$$

$$\begin{aligned}&\phi_{22}(x,y)\\&=-\frac{\bar{\tau}-\tau}{2\tau}e^{-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}(q-t+\pi)x+\frac{\mathbf{i}}{2}y-\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(p-s+\pi)^2-\frac{\mathbf{i}}{2}(q-t)}\sum_{Q\in\mathbb{Z}}\sum_{H\in\mathbb{Z}}(-1)^{Q+H}e^{-\mathbf{i}(q-t)Q-\frac{\pi\mathbf{i}}{\tau}(H-2Q-\frac{1}{2})^2}\\&\quad\times\theta_\varepsilon(x-(-2\pi H+p-s))e^{\frac{\mathbf{i}}{8\pi\tau}(x+4\pi Q-p+s+\pi)^2}e^{\mathbf{i}Qy}.\end{aligned}$$

定理 3.5 についても同様なので, 定理 3.4 の証明の概略を説明する (詳細については [5] 参照). $E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})}$ と $C(\psi)$ は両方とも階数 2 の正則ベクトル束であるため, $\tilde{\phi}$ は局所的に 2 次正方行列

$$\tilde{\phi}=\begin{pmatrix}\tilde{\phi}_{11}(x,y) & \tilde{\phi}_{12}(x,y)\\ \tilde{\phi}_{21}(x,y) & \phi_{22}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{I\in\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_{11,I}(x)e^{\mathbf{i}Iy} & e^{\frac{\mathbf{i}}{2}y}\sum_{J\in\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_{12,J}(x)e^{\mathbf{i}Jy}\\ \sum_{K\in\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_{21,K}(x)e^{\mathbf{i}Ky} & e^{\frac{\mathbf{i}}{2}y}\sum_{L\in\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_{22,L}(x)e^{\mathbf{i}Ly}\end{pmatrix}$$

で書くことができる [3]. 一方, $\tilde{\phi}\in H^0(E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})},C(\psi))$ であるから, $\tilde{\phi}$ は微分方程式 $d_{C(\psi)}\tilde{\phi}-\tilde{\phi}d=0$ を満たす. ここで,

$$d_{C(\psi)}:=\begin{pmatrix}d_0 & \psi\\ 0 & d_1\end{pmatrix},\quad d:=\begin{pmatrix}d_{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & d_{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

である. また, 微分方程式を解いた際に現れる任意定数については $E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})}$ と $C(\psi)$ の変換関数についての条件を満たし, かつ, $\tilde{\phi}$ の各成分として現れる関数 $\phi_{ij}(x,y)$ $(1\le i,j\le 2)$ が各点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ において発散することのないように決定する必要がある. 特に, $\tilde{\phi}_{11,I}(x)$, $\tilde{\phi}_{12,J}(x)$ については任意の $I,J\in\mathbb{Z}$ に対して $\lim_{x\to-\infty}\tilde{\phi}_{11,I}(x)=\lim_{x\to-\infty}\tilde{\phi}_{12,J}(x)=0$ となるものの, $x\to+\infty$ における値は指標付きテータ関数

$$\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi\mathbf{i}(n+\frac{1}{2})^2\tau+2\pi\mathbf{i}(n+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$$

を用いて記述されるため, このテータ関数のゼロ点に関する情報から条件 $\eta\equiv\mu+\nu+\pi+\pi\tau \pmod{2\pi(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})}$ を得る.

さらに, 上記の定理 3.4, 定理 3.5 で得られた $\tilde{\phi}$, ϕ に対し,

$$\phi\tilde{\phi}=c_\tau\cdot I,\quad c_\tau:=\frac{\bar{\tau}-\tau}{4\tau}\mathbf{i}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^l(2l+1)e^{-\frac{\pi\mathbf{i}}{\tau}(l+\frac{1}{2})^2}$$

となることが直接計算することにより確認できる. この c_τ は指標付きテータ関数を用いて

$$c_\tau=-\frac{\bar{\tau}-\tau}{4\pi\tau}\mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(\beta,-\frac{1}{\tau}\right)\Big|_{\beta=0}$$

と書くことができ, ヤコビの微分公式 ([7], p.64) を用いると

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(\beta,-\frac{1}{\tau}\right)\Big|_{\beta=0}=-\pi\vartheta_{0,0}\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)\vartheta_{0,\frac{1}{2}}\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)\vartheta_{\frac{1}{2},0}\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)$$

と変形できるため, $c_\tau\neq 0$ となることが分かる. したがって, $(\frac{1}{\sqrt{c_\tau}}\phi)(\frac{1}{\sqrt{c_\tau}}\tilde{\phi})=I$ となるので, $\eta\equiv\mu+\nu+\pi+\pi\tau \pmod{2\pi(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})}$ となることと $C(\psi)\cong E_{(\frac{1}{2},\frac{\eta}{2})}$ となることは同値である. 以上をまとめて次の定理を得る.

[3] 第 2 章でもコメントしたが, 一般的に, 今考えている DG 圏 $DG_{\check{T}^2}$ における射は局所的にはフーリエ展開して書くことができる.

定理 3.6. $C(\psi) \cong E_{(\frac{1}{2}, \frac{\eta}{2})}$ となるための必要十分条件は $\eta \equiv \mu + \nu + \pi + \pi\tau \pmod{2\pi(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})}$ となることであり, $\frac{1}{\sqrt{c_\tau}}\phi$, $\frac{1}{\sqrt{c_\tau}}\tilde{\phi}$ がその同型を与える同型射である.

最後に, $\eta \equiv \mu + \nu + \pi + \pi\tau \pmod{2\pi(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})}$ となる場合の 3 つのラグランジュ部分多様体 $\mathcal{L}_{(0,p)}$, $\mathcal{L}_{(1,s)}$, $\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, \frac{u}{2})}$ の成す深谷圏 $\mathrm{Fuk}(T^2)$ について考える (深谷圏について, 詳しくは [3] 参照). シンプレクティック多様体 (M, ω) に対し, 深谷圏 $\mathrm{Fuk}(M)$ の対象はラグランジュ部分多様体 (とその上の $U(1)$ 束の組) であり, 射の空間は横断的に交わる 2 つのラグランジュ部分多様体 L_a, L_b に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fuk}(M)}(L_a, L_b) := \oplus_{v \in L_a \cap L_b} \mathbb{C}[v]$$

と定義する. ただし, $[v]$ は L_a と L_b の交点 v に対応する $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間の基底であり, その次数はマスロフ指数を用いて定義される. 今考えている例 $\mathrm{Fuk}(T^2)$ の場合, T^2 の基本領域 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ において $\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, \frac{u}{2})} \cap \mathcal{L}_{(1,s)}$, $\mathcal{L}_{(1,s)} \cap \mathcal{L}_{(0,p)}$, $\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, \frac{u}{2})} \cap \mathcal{L}_{(0,p)}$ は 1 点のみなので, その交点をそれぞれ e_1, e_2, e_3 と定義し, これをそれぞれのラグランジュ部分多様体の間の射の空間の元と見なす. ただし, e_1 は 0 次, e_2, e_3 は 1 次の射である.

$$e_1 \in \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{Fuk}(T^2)}(\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, \frac{u}{2})}, \mathcal{L}_{(1,s)}), e_2 \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{Fuk}(T^2)}(\mathcal{L}_{(1,s)}, \mathcal{L}_{(0,p)}), e_3 \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{Fuk}(T^2)}(\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, \frac{u}{2})}, \mathcal{L}_{(0,p)}).$$

さらに, 深谷圏の A_∞ 積構造 m_n は以下のように定義される. ラグランジュ部分多様体 $L_1, \cdots, L_{n+1}$ について, 各 L_i と L_{i+1} は互いに横断的に交わっており, $v_{12} \in L_1 \cap L_2, \cdots, v_{n(n+1)} \in L_n \cap L_{n+1}$, $v \in L_{n+1} \cap L_1$ であるとする. また, 境界 $\partial(\Sigma)$ 上に巡回的に点 z_{12}, $\cdots$, $z_{n(n+1)}$, $z_{(n+1)1}$ が割り振られている円板 Σ 上で定義された概正則写像 $\phi : \Sigma \to M$ であって, $\phi(z_{i(i+1)}) = v_{i(i+1)}$, $\phi(z_{(n+1)1}) = v$ かつ $\phi(\partial(\Sigma)) \subset \cup_{i=1}^{n+1} L_i$ を満たすものを考える. このとき,

$$m_n([v_{12}] \otimes \cdots \otimes [v_{n(n+1)}]) := \sum_{v \in L_{n+1} \cap L_1} \sum_{\phi} \pm e^{-\int_\Sigma \phi^* \omega}$$

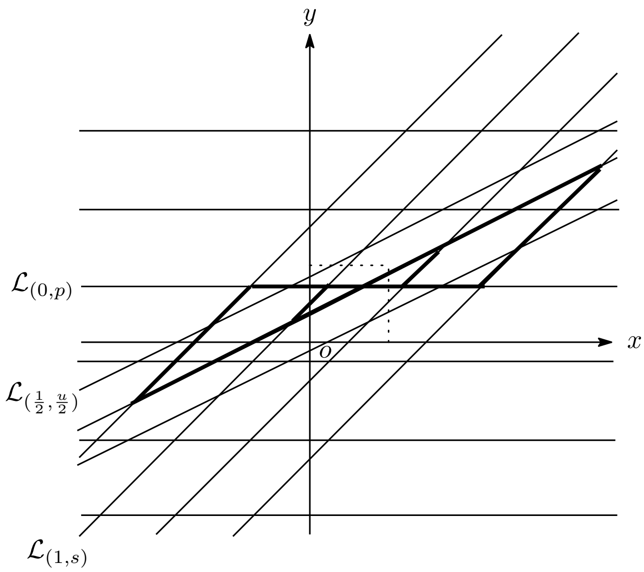
と定める (符号の決め方に関してはここでは省略する). ただし, $\int_\Sigma \phi^* \omega$ は Σ のシンプレクティック面積とする. この定義に基づいて, $m_2 : \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{Fuk}(T^2)}(\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, \frac{u}{2})}, \mathcal{L}_{(1,s)}) \otimes \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{Fuk}(T^2)}(\mathcal{L}_{(1,s)}, \mathcal{L}_{(0,p)}) \to \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{Fuk}(T^2)}(\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, \frac{u}{2})}, \mathcal{L}_{(0,p)})$ を計算すると次のようになる.

$$m_2(e_1 \otimes e_2) = \pm \mathrm{i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{\tau}(n + \frac{1}{2})^2} e^3 = 0$$

これは補題 3.2 における $F(\psi) = 0$ の場合と対応する. ここで, $F(\psi)$ は射 $E_{(\frac{1}{2}, \frac{\eta}{2})} \to E_{(1,\nu)}$ と射 $\psi : E_{(1,\nu)} \to TE_{(0,\mu)}$ の合成であることに注意する. さらに, c_τ については以下のように解釈することができる. 定義より

$$c_\tau = \frac{\bar{\tau} - \tau}{2\tau} \mathbf{i} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \left(l + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{2\pi \mathbf{i}}{\tau} \cdot \frac{1}{2}(l + \frac{1}{2})^2}$$

であり, $\frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{2}(l + \frac{1}{2})^2$ $(l \in \mathbb{Z})$ は複素化されたシンプレクティック形式 $\omega = \frac{1}{\tau} dx \wedge dy$ で測ったシンプレクティック面積に対応し, $l + \frac{1}{2}$ $(l \in \mathbb{Z})$ は $\mathcal{L}_{(0,p)}$, $\mathcal{L}_{(1,s)}$, $\mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, \frac{u}{2})}$, 及び T^2 の被覆空間 $\mathbb{R}^2$ においてそれらのコピーとして得られる直線で囲まれてできる三角形の辺の長さに対応している. これは, 深谷圏 $\mathrm{Fuk}(T^2)$ における 3 次の積構造 $m_3(e_1 \otimes e_2 \otimes e_3)$ として解釈することができる ([4], eq(19) において $n = 2$, $b = 1$ とした場合に対応している).



参考文献

[1] M. F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve. Proc. London Math. Soc, 1957.

[2] A. Bondal and M. Kapranov, Enhanced triangulated categories. Math. USSR Sbornik 70:93-107, 1991.

[3] K. Fukaya, Morse homotopy, A^{∞}-category, and Floer homologies. In: Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993). Lecture Notes in Series, vol. 18, pp. 1-102. Seoul Nat. Univ., Seoul (1993).

[4] H. Kajiura, Homological perturbation theory and homological mirror symmetry. In Higher Structures in Geometry and Physics, volume 287 of Progress in Math., pages 201-226, Birkhäuser/Springer, New York, 2011.

[5] K. Kobayashi, On exact triangles consisting of stable vector bundles on tori. math.DG/1610.02821.

[6] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), volume 184, pages 120-139. Birkhäuser, 1995. math.AG/9411018.

[7] D. Mumford, Tata Lectures on Theta, Progress in Mathmatics Vol 28, Birkhäuser Boston · Basel · Stuttgart, 1983.

[8] A. Polishchuk, Abelian Varieties, Theta Functions and the Fourier Transform, Cambridge University Press, 2003.