同変 Čech-de Rham 理論とその応用

藤沢 好 (Ko FUJISAWA)*

北海道大学大学院理学院数学専攻 博士課程 1 年

1 序論

多様体の Čech-de Rham コホモロジーとは，Čech と de Rham それぞれのコホモロジーの同型を与える道具として導入されたものであった．それを，コサイクル・レベルでコホモロジーの明示公式を記述する道具として整備・発展させたのが諏訪立雄教授の Čech-de Rham 理論 [1][2] である：

$$\boxed{\text{de Rham 理論}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\text{Čech-de Rham 理論}}$$

講演者はこの同変版として同変 Čech-de Rham 理論を構成し, 同変特性類の局所化を記述する枠組みの整備を行った. 特に応用として, 同変 Chern 形式の局所化として同変普遍 Thom 形式が具体的に記述されることを示した. これは Mathai-Quillen らによるフェルミオン積分や超対称性を用いた同変普遍 Thom 形式の導出 [3] よりもはるかに初等的かつ具体的であり, 様々な面で優れたツールを提供してくれるものである.

2 主結果

ここでは, 講演者による結果として同変 Čech-de Rham 理論における同変特性類の局所化と, それを用いた $U(l)$ 同変普遍 Thom 形式の導出について述べる.

M を Lie 群 G の作用が与えられた多様体とする．このとき Cartan 複体 $\Omega_G^*(M)$ が定義され [4], その Čech 化により得られる複体 $\Omega_G^*(\mathcal{U})$ のコホモロジーが同変 Čech-de Rham コホモロジー $H_G^*(\mathcal{U})$ である．ここで $\mathcal{U}$ は G-不変な開集合からなる被覆とする．

---

* fujisawa1219@math.sci.hokudai.ac.jp

特に 2 つの G-不変な開集合による被覆 $\mathcal{U}=\{U_0,U_1\}$ に対して, その複体 $\Omega^*_G(\mathcal{U})$ と微分 D_{eq} は次のようにして与えられる;

$$\Omega^r_G(\mathcal{U})=\Omega^r_G(U_0)\oplus\Omega^r_G(U_1)\oplus\Omega^{r-1}_G(U_0\cap U_1)$$
$$D_{eq}:\Omega^r_G(\mathcal{U})\to\Omega^{r+1}_G(\mathcal{U}),\quad (\xi_0,\xi_1,\xi_{01})\mapsto(d_{eq}\xi_0,\ d_{eq}\xi_1,\ \xi_1-\xi_0-d_{eq}\xi_{01})$$

ここで d_{eq} は Cartan 複体における微分である. また複体 $(\Omega^*_G(\mathcal{U}),D_{eq})$ の部分複体

$$\Omega^r_G(\mathcal{U},U_0)=\{\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_{01})\in\Omega^r_G(\mathcal{U})\mid\xi_0=0\}$$

のコホモロジーを $H^*_G(\mathcal{U},U_0)$ と書き, 同変相対 de Rham コホモロジーと呼ぶ. 以下の議論では被覆が 2 つの開集合である場合のみを考える.

同変 Čech-de Rham コホモロジーにおける同変特性類は, 同変 Chern-Weil 理論 [4] と Bott 差形式 [1] を介して定義される. すなわち $\pi:E\to M$ を G-同変 l 次元ベクトル束とし, ∇^0_{eq} を $E|_{U_0}$ 上の G-同変接続, ∇^1_{eq} を $E|_{U_1}$ 上の G-同変接続とする. このとき不変多項式 ϕ に対し, 同変特性類が

$$\phi(\nabla^*_{eq})=(\phi(\nabla^0_{eq}),\phi(\nabla^1_{eq}),\phi(\nabla^0_{eq},\nabla^1_{eq}))\in\Omega^*_G(\mathcal{U})$$

で定義される。ここで $\phi(\nabla^0_{eq},\nabla^1_{eq})$ は Bott 差形式である. この定義のもとで同変特性類の局所化は次にように説明される. $S\subset M$ を G-不変閉部分多様体とし, $U_0=M\setminus S$, U_1 を S の G-不変な開近傍とする. このとき $\mathcal{U}=\{U_0,U_1\}$ は M の G-被覆となり, 短完全系列

$$0\to\Omega^*_G(\mathcal{U},U_0)\to\Omega^*_G(\mathcal{U})\to\Omega^*_G(U_0)\to0$$

から誘導されるコホモロジーの完全系列

$$\cdots\to H^*_G(M,M\setminus S)\to H^*_G(M)\to H^*_G(M\setminus S)\to\cdots$$

が考えられる. いまある幾何学的な理由で特性類 $\phi_G(E)_{eq}\in H^*_G(M)(=H^*_G(\mathcal{U}))$ が $H^*_G(M\setminus S)$ で消滅したとする. このとき系列の完全性より $H^*_G(M,M\setminus S)(=H^*_G(\mathcal{U},U_0))$ に $\phi(E)_{eq}$ に対応する元があるが, 一般にこれは一意ではない. しかし実は特性類が微分形式のレベルで消滅している場合には対応する元が一意に定まる. これを特性類 $\phi(E)_{eq}$ の局所化と呼ぶ. この枠組みを用いて同変普遍 Thom 形式が以下のようにして導出される:

自明な $U(l)$ 同変ベクトル束 $\pi:\mathbb{C}^l\to\{0\}$ に対し $\mathcal{W}=\{W_0,W_1\}$ を $W_0=\mathbb{C}^l\setminus\{0\}$, $W_1=\mathbb{C}^l$ と定める. 対角切断

$$s_\Delta:\mathbb{C}^l\to\pi^*\mathbb{C}^l$$

に対して, D^0_{eq} を s_Δ-trivial な $\pi^*\mathbb{C}^l$ の W_0 上の同変接続, D^1_{eq} を $\pi^*\mathbb{C}^l$ の W_1 上の同変接続とする．このとき $c^l(\pi^*\mathbb{C}^l, s_\Delta)_{eq}$ を

$$c^l(D^*_{eq}) = (0, c^l(D^1_{eq}), c^l(D^0_{eq}, D^1_{eq})) \in \Omega^{2l}_G(\mathcal{W}, W_0)$$

で代表されるコホモロジー類とする．ここで c^l は l 次の Chern 多項式である．これはファイバー積分によって 1 となることが確かめられ, 同変普遍 Thom 類になることがわかる。さらに具体的に同変接続 D^0_{eq}, D^1_{eq} を決定することにより, 同変普遍 Thom 形式の各成分 $c^l(D^1_{eq}), c^l(D^0_{eq}, D^1_{eq})$ が次のように書けることが示される．

定理 2.1　$\mathfrak{u}(l)$ をユニタリー群 $U(l)$ の Lie 環とする．$X \in \mathfrak{u}(l)$ に対し

$$c^l(D^1_{eq})(X) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^l \mathrm{det}X$$

$$c^l(D^0_{eq}, D^1_{eq})(X) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^l \sum_{k,I,J} \gamma_{(k,I,J)} \sum_{I',J'} X_{I,I'} \frac{\bar{z}_k d\bar{z}_J \wedge dz_{J'}}{\|z\|^{2(|J|+1)}}$$

と書ける．ここで

$$\gamma_{(k,I,J)} = (-1)^{\frac{|J|(|J|+1)}{2}} |J|!\epsilon(k, J)$$

であり, $1 \leq k \leq l$ と集合 I, J は $\{1, 2, ..., l\}$ の分割となるように動き, また I',J' は $\{1, 2, ..., l\}$ の分割で $|I| = |I'|$,$I' \cup J'$ を満たすように動くとする．

$c^l(D^1_{eq}), c^l(D^0_{eq}, D^1_{eq})$ はそれぞれ同変 Euler 形式, 同変 Bochner-Martinelli kernel と呼ばれる。通常の Euler 形式,Bochner-Martinelli kernel は群の作用が自明な場合, もしくは $X = 0$ の場合に対応していることもわかる．

参考文献

[1] Tatsuo Suwa. Complex analytic geometry, in preparation. *World Scientific*.

[2] Suwa, T. "Indices of vector fields and residues of holomorphic singular foliations." *Hermann*, Paris (1998).

[3] Mathai, Varghese, and Daniel Quillen. "Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms." *Topology* 25.1 (1986): 85-110.

[4] Berline, Nicole, Ezra Getzler, and Michele Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*. Springer Science & Business Media, 2003.