# Some Cheeger-Gromov-Taylor Type Compactness Theorems via the Modified Ricci Curvature

只野　誉 (Homare TADANO)*

**概　要**

In this note, we will give some Cheeger–Gromov–Taylor type compactness theorems for complete Riemannian manifolds via modified Ricci and $m$-modified Ricci curvatures. Our compactness theorems improve previous ones obtained by Fernández-López and García-Río, Limoncu, and Qian.

## 1. Myers の定理とその一般化

本稿を通して全ての Riemann 多様体は連結かつ滑らかであり, 境界を持たないと仮定する. Riemann 幾何学における最も重要な問題の一つは Riemann 多様体上の幾何構造とその位相の関係を調べることである. J. Lohkamp [6] は 3 次元以上ならば, どんな多様体も負の Ricci 曲率を持つ完備 Riemann 計量を許すことを示した. これは次元が 3 以上の場合, 多様体が負の Ricci 曲率を備えた完備 Riemann 計量を持つための位相的な障害が無いことを意味する. 一方, S. B. Myers [7] は Ricci 曲率が下から正の定数で抑えられる場合, 完備 Riemann 多様体は必ずコンパクトになることを示した. これは全ての非コンパクト多様体が正の下界を持つ Ricci 曲率を備えた完備 Riemann 計量を持ち得ないことを意味する.

**定理 1.1** (S. B. Myers [7]). *Let $(M, g)$ be an $n$-dimensional complete Riemannian manifold. If there exists some positive constant $\lambda > 0$ such that $\mathrm{Ric}_g \geqslant \lambda g$, then $(M, g)$ is compact with finite fundamental group. Moreover, the diameter of $(M, g)$ satisfies*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}}.$$

S. B. Myers の定理は多くの数学者によって様々な方向へと一般化されてきた. 最初の一般化は W. Ambrose [1] によって与えられた. ここで Ricci 曲率に対する下界は Ricci 曲率の測地線に沿った積分条件に置き換えられた.

**定理 1.2** (W. Ambrose [1]). *Let $(M, g)$ be a complete Riemannian manifold. Suppose that there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0, +\infty) \to M$ emanating from $p$ satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Ric}_g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))ds = +\infty.$$

*Then $(M, g)$ is compact.*

第 13 回 数学総合若手研究集会 (2017 年 2 月 27 日–2017 年 3 月 2 日, 於 北海道大学) 報告集
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 53C21, Secondary 53C20
キーワード：Myers の定理, ($m$–) Bakry–Émery Ricci 曲率, ($m$–) Modified Ricci 曲率
* 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1 番 1 号 大阪大学大学院理学研究科
e-mail: h-tadano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

また, J. Cheeger, M. Gromov, M. Taylor は完備 Riemann 多様体の十分大きな領域の外での Ricci 曲率の漸近的な振る舞いを仮定することで, Myers 型の定理を示した.

**定理 1.3** (J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor [2])**.** *Let $(M, g)$ be an $n$-dimensional complete Riemannian manifold. Suppose that there exist some point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $v > 0$ such that the Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\frac{\left(\frac{1}{4}+v^2\right)}{r^2(x)} \tag{1.4}$$

*for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between $x$ and $p$. Then $(M, g)$ must be compact. Moreover, the diameter of $(M, g)$ from $p$ satisfies*

$$\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant r_0 \exp\left(\frac{\pi}{v}\right).$$

**注意 1.5.** (1.4) で $v = 0$ とすると, Theorem 1.3 は成立しない.

## 2. 主結果

本稿の目的は Ricci 曲率の変形を用いて, 定理 1.3 の一般化を与えることである.

**定義 2.1.** Riemann 多様体 $(M, g)$ 上の函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ と正数 $m \in (n, +\infty)$ に対して

$$\mathrm{Ric}_f := \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f, \quad \mathrm{Ric}_f^m := \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f - \frac{1}{m-n} df \otimes df \tag{2.2}$$

とおき, 其々 *Bakry–Émery Ricci* 曲率, *m–Bakry–Émery Ricci* 曲率 と呼ぶ. より一般的に $(M, g)$ 上のベクトル場 $V \in \mathfrak{X}(M)$ と正数 $m \in (n, +\infty)$ に対して

$$\mathrm{Ric}_V := \mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g, \quad \mathrm{Ric}_V^m := \mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g - \frac{1}{m-n} V^* \otimes V^* \tag{2.3}$$

とおき, 其々 *modified Ricci* 曲率, *m–modified Ricci* 曲率 と呼ぶ. ここで $V^*$ は Riemann 計量 $g$ から定まる $V$ の双対である.

定義 2.1 において, 函数 $f : M \to \mathbb{R}$ が定数またはベクトル場 $V$ が零である場合, (2.2) または (2.3) で与えた Ricci 曲率の変形は全て通常の Ricci 曲率に一致する. $(m)$–Bakry–Émery Ricci 曲率または $(m)$–modified Ricci 曲率は Ricci 曲率の自然な一般化であるから定理 1.1 のような基本的な性質がこれらの一般化に対して拡張出来ないか考えることは自然である. 完備 Riemann 多様体 $(M, g)$ 上の modified Ricci 曲率が正の下界を持つ場合, 多様体のコンパクト性は modified Ricci 曲率に現れるベクトル場のノルムの有界性によって特徴付けられる.

**定理 2.4** (M. Fernández-López and E. García-Río [3])**.** *Let $(M, g)$ be a complete Riemannian manifold satisfying $\mathrm{Ric}_V \geqslant \lambda g$ for some vector field $V \in \mathfrak{X}(M)$ and positive constant $\lambda > 0$. Then $M$ is compact if and only if $|V|$ is bounded on $M$.*

定理 2.4 は W. Ambrose [1] による定理 1.2 から従う. しかしながら, この定理では Riemann 多様体の直径評価は与えられていない. 定理 2.4 の別証明を与える形で, M. Limoncu [4] が多様体の直径評価を与えている.

**定理 2.5** (M. Limoncu [4])**.** *Let $(M, g)$ be an $n$-dimensional complete Riemannian manifold satisfying* $\mathrm{Ric}_V \geqslant \lambda g$ *for some positive constant* $\lambda > 0$*. If* $|V| \leqslant k$ *for some non-negative constant* $k \geqslant 0$*, then* $(M, g)$ *is compact. Moreover, the diameter of* $(M, g)$ *satisfies*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{k}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{k^2}{2} + (n-1)\lambda}\right). \tag{2.6}$$

一方, Bakry–Émery Ricci 曲率が正の下界を持つ場合, 対応する函数が多様体上で一様に有界であれば, 完備 Riemann 多様体はコンパクトとなる.

**定理 2.7** (G. Wei and W. Wylie [11])**.** *Let $(M, g)$ be an $n$-dimensional complete Riemannian manifold satisfying* $\mathrm{Ric}_f \geqslant \lambda g$ *for some positive constant* $\lambda > 0$*. If* $|f| \leqslant k$ *for some non-negative constant* $k \geqslant 0$*, then* $(M, g)$ *is compact. Moreover, the diameter of* $(M, g)$ *satisfies*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}} + \frac{4k}{\sqrt{(n-1)\lambda}}. \tag{2.8}$$

**注意 2.9.** 定理 2.5 及び定理 2.7 において $k = 0$ とすれば, これらは定理 1.1 に帰着される. 最近, M. Limoncu [4, 5] の議論を修正することで (2.6), (2.8) を改良した直径評価が其々 [9, 10] で与えられた.

M. Limoncu [5] は Bakry–Émery Ricci 曲率が正の下界を持つ場合, 対応する函数の勾配ベクトル場のノルムの漸近的な振る舞いを仮定して完備 Riemann 多様体のコンパクト性を示した.

**定理 2.10** (M. Limoncu [5])**.** *Let $(M, g)$ be an $n$-dimensional complete Riemannian manifold satisfying* $\mathrm{Ric}_f \geqslant \lambda g$ *for a positive constant* $\lambda > 0$*. Suppose that there exist a point* $p \in M$ *and a non-negative constant* $k \geqslant 0$ *such that*

$$|\nabla f|(x) \leqslant \frac{k}{d(x, p)}$$

*for all* $x \in M \setminus \{p\}$*, where* $d(x, p)$ *is the distance between* $x$ *and* $p$*. Then* $(M, g)$ *is compact. Moreover, the diameter of* $(M, g)$ *from* $p$ *satisfies*

$$\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n - 1 + 4k}.$$

我々の第一の主結果は, 定理 1.3 を一般化した次の Cheeger–Gromov–Taylor 型の定理である. これは定理 2.10 の一般化とも考えられる.

**定理 2.11.** *Let $(M, g)$ be an $n$-dimensional complete Riemannian manifold. Suppose that there exist some point* $p \in M$ *and positive constants* $r_0 > 0$ *and* $v > 0$ *such that the modified Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_V(x) \geqslant (n-1)\frac{\left(\frac{1}{4} + v^2\right)}{r^2(x)}$$

*for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between $x$ and $p$. If there exists some non-negative constant $k \geqslant 0$ such that the vector field $V$ satisfies*

$$|V|(x) \leqslant \frac{k}{r(x)} \quad \textit{and} \quad k < (n-1)v^2$$

*for all $x \in M \setminus \{p\}$, where $r(x)$ denotes the distance between $x$ and $p$, then $(M, g)$ must be compact. Moreover, the diameter of $(M, g)$ from $p$ satisfies*

$$\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant r_0 \exp\left(\frac{2k + \sqrt{4k^2 + ((n-1)^2v^2 - k(n-1))\pi^2}}{(n-1)v^2 - k}\right).$$

**注意 2.12.** 定理 2.11 において $k = 0$ とすれば, これらは定理 1.3 に帰着される.

M. Limoncu [4] は $m$–modified Ricci 曲率が正の下界を持つ場合, 対応するベクトル場の条件無しに完備 Riemann 多様体のコンパクト性が従うことを示した.

**定理 2.13** (M. Limoncu [4])**.** *Let $(M, g)$ be an $n$-dimensional complete Riemannian manifold. Suppose that there exists some positive constant $\lambda > 0$ such that the $m$-modified Ricci curvature satisfies $\mathrm{Ric}_V^m \geqslant \lambda g$, where $m \in (n, +\infty)$. Then $(M, g)$ must be compact. Moreover, the diameter of $(M, g)$ satisfies*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{m-1}{\lambda}}.$$

**注意 2.14.** 定理 2.13 はベクトル場が勾配ベクトル場の場合に Z. Qian [8] によって示されている.

我々の第二の主結果は, 定理 2.13 を一般化した次の Cheeger–Gromov–Taylor 型の定理である.

**定理 2.15.** *Let $(M, g)$ be an $n$-dimensional complete Riemannian manifold. Suppose that there exist a point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $v > 0$ such that the $m$-modified Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_V^m(x) \geqslant (m-1)\frac{\left(\frac{1}{4} + v^2\right)}{d^2(x, p)}$$

*for all $x \in M$ satisfying $d(x, p) \geqslant r_0$, where $m \in (n, +\infty)$ and $d(x, p)$ is the distance between $x$ and $p$. Then $(M, g)$ is compact. Moreover, the diameter from $p$ satisfies*

$$\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant r_0 \exp\left(\frac{\pi}{v}\right).$$

## 参考文献


[1] W. Ambrose, *A theorem of Myers*, Duke Math. J. **24** (1957), 345–348.

[2] J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 15–53.

[3] M. Fernández-López and E. García-Río, *A remark on compact Ricci solitons*, Math. Ann. **340** (2008), 893–896.

[4] M. Limoncu, *Modifications of the Ricci tensor and applications*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 191–199.

[5] ____, *The Bakry–Emery Ricci tensor and its applications to some compactness theorems*, Math. Z. **271** (2012), 715–722.

[6] J. Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), 655–683.

[7] S. B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.

[8] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Q. J. Math. **48** (1997), 235–242.

[9] H. Tadano, *An upper diameter bound for compact Ricci solitons with applications to the Hitchin–Thorpe inequality*, Preprint, 2015.

[10] ____, *Remark on a diameter bound for complete Riemannian manifolds with positive Bakry–Émery Ricci curvature*, Diff. Geom. Appl. **44** (2016), 136–143.

[11] G. Wei and W. Wylie, *Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor*, J. Differential Geom. **83** (2009), 377–405.