# 偏極トーリック多様体に対する<br>対数的Chow半安定性のある必要条件について

中村 聡　(東北大学)*

## 1. はじめに

$X \subset \mathbb{C}P^N$ を射影代数多様体，$D \subset X$ を因子とし，$\beta \in [0, 1]$ (cone angle) とする．対数的Chow(半)安定性はこれらの組 $(X, D, \beta)$ に対して定義される，幾何学的不変式論的概念である．導入された動機としては (1) 対数的K-安定性および Conical Kähler Einstein (一般に Conical constant scalar curvature) 計量の存在との関連 [1]，(2) この組のモジュライ空間のコンパクト化 [3, 9] がある．本講演では偏極トーリック多様体とトーリック因子との組に対して，半安定性の必要条件を求める．さらに応用として，いくつかの具体例に対して，Conical Kähler Einstein 計量の存在との関係を見る．

## 2. 対数的チャウ半安定性

$X \subset \mathbb{P}(V)$ を $n$ 次元，$d$ 次の既約な射影代数多様体とする．このとき

$$Z_X := \left\{ (H_0, \ldots, H_n) \in \mathbb{P}(V^*)^{n+1} \,\middle|\, (\cap_{i=0}^n H_i) \cap X \neq \emptyset \right\}$$

は $\mathbb{P}(V^*)^{n+1}$ の超曲面で，その多重次数は $(d, \ldots, d)$ なので，$Z_X$ で消える切断として，$X$ の Chow 形式 $R_X \in (\mathrm{Sym}^d V)^{\otimes (n+1)}$ が定数倍を除いて一意に定まる．

$(\mathrm{Sym}^d V)^{\otimes (n+1)}$ には自然に $SL(V)$ が作用するが，その作用を $\alpha \in \mathbb{R}$ だけ捻ったもの (i.e. $(\exp(u), R_X) \mapsto \exp(\alpha u) \cdot R_X$) を作用させた Chow 形式を, $R_X^{(\alpha)}$ と書くことにする．

**定義 2.1.** ([3, 9] c.f.[1]) $X$ は上の通りで，$D \subset X$ を $d'$ 次の既約因子とし，$\beta \in [0, 1]$ とする．

$$R_X^{(2n)} \otimes R_D^{((1-\beta)(n+1))} \in (\mathrm{Sym}^d V)^{\otimes (n+1)} \otimes (\mathrm{Sym}^{d'} V)^{\otimes n}$$

の $SL(V)$-軌道の閉包が原点を含まないとき，$(X, D, \beta)$ は対数的Chow半安定という．

また，偏極多様体 $(X, L)$ とその因子 $D$ に対しては，$L^i$ による小平埋め込み $D \subset X \subset \mathbb{P}(H^0(X, L^i)^*)$ を通して，$(X, D, L^i, \beta)$ の対数的Chow半安定性を定義する．

**注意 2.2.** (1) $\beta = 1$ のときは，Mumford が定義した射影代数多様体の Chow 半安定性 [4] である．

(2) 作用のウェイト比を $2n : (1-\beta)(n+1)$ と取ると，対数的Chow半安定性から対数的K-半安定性 (説明しない) が従う．

(3) 異なる既約因子の和 $\sum_p (1-\beta_p) D_p$ に対しては，$\otimes_p R_{D_p}^{((1-\beta_p)(n+1))}$ を考えることで半安定性を定義する．

---

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 53C56; Secondary 14L24.
キーワード：Toric manifolds, Log Chow semistability, Log K-semistability, Conical Kähler Einstein metric.
* 〒980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6番3号　東北大学 大学院理学研究科
e-mail: sb3m25@math.tohoku.ac.jp

## 3. 偏極トーリック多様体の場合の必要条件

Delzant 多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ と $n$ 次元偏極トーリック多様体 $(X_P, L_P)$ とが一対一に対応することが知られている．また，拡大 $iP$ には，$(X_P, L_P^i)$ が対応する．具体的には，$\{iP \cap \mathbb{Z}^n\} \cong \{P \cap (\mathbb{Z}/i)^n\} := \{a_{i,1}, \ldots, a_{i,N_i}\}$ のときに，$X_P$ の $L_P^i$ による小平埋め込みの像は以下のようになる:

$$\text{closure of } \{ [t^{a_{i,1}} : \cdots : t^{a_{i,N_i}}] \mid t \in (\mathbb{C}^*)^n \} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{N_i}).$$

さらに，1 つの辺 $F \subset P$ にはトーリック多様体が持つ $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用で不変な既約因子 (トーリック因子)$D_F$ が対応する．具体的には，

$$\left\{ [u_{a_{i,1}} : \cdots : u_{a_{i,N_i}}] \in X_P \;\middle|\; u_k \equiv 0 \text{ iff } a_k \notin F \cap (\mathbb{Z}/i)^n \right\}.$$

本講演の主結果は $(X_P, D_F, L_P^i, \beta)$ の対数的 Chow 半安定性の 1 つの必要条件を，多面体 $P$ の情報で記述したものである．

**定理 3.1.** $(X_P, D_F, L_P^i, \beta)$ が対数的 *Chow* 半安定性ならば，

$$\#\{P \cap (\mathbb{Z}/i)^n\}\Big(2i\int_P g_\varphi d\nu + (1-\beta)\int_F g_\varphi d\sigma\Big) \geq \Big(2i\mathrm{Vol}(P) + (1-\beta)\mathrm{Vol}(F)\Big) \sum_{a \in P \cap (\mathbb{Z}/i)^n} g_\varphi(a).$$

が任意 $g_\varphi \in \mathrm{PL}(P, i)$ に対して成り立つ．ここで，$g_\varphi$ は $\varphi : P \cap (\mathbb{Z}/i)^n \to \mathbb{Z}$ から "標準的に" 定まる，区分的線型な凹関数であり，$d\nu$ は $\mathbb{R}^n$ の *Euclid* 体積形式である．$d\sigma$ は次で定まる $\partial P$ の体積形式である: $F$ を $\{h_F(\vec{x}) = c_F\}$ と表すとき，$dh_F \wedge d\sigma = d\nu$.

**注意 3.2.**

$$T_{P,i} := \left\{ \left(t_1, \ldots, t_{N_i-1}, (t_1 \cdots t_{N_i-1})^{-1}\right) \mid (t_1, \ldots, t_{N_i-1}) \in (\mathbb{C}^*)^{N_i-1} \right\} \cong (\mathbb{C}^*)^{N_i-1}$$

は $SL(\mathbb{C}^{N_i})$ の極大代数トーラスである．実は，定理 3.1 の結論は，$R_{X_P}^{(2n)} \otimes R_{D_F}^{((1-\beta)(n+1))}$ の $T_{P,i}$-軌道の閉包が原点を含まないことと同値である．幾何学的不変式論の一般論 (例えば [5]) により，$SL(\mathbb{C}^{N_i})$-軌道の閉包が原点を含まない (つまり半安定) ならば，極大代数トーラスに関する軌道の閉包も原点を含まないことが知られている．

**系 3.3.** $(X_P, D_F, L_P^i, \beta)$ が対数的 *Chow* 半安定性ならば，

$$\#\{P \cap (\mathbb{Z}/i)^n\}\Big(2i\int_P \vec{x} d\nu + (1-\beta)\int_F \vec{x} d\sigma\Big) = \Big(2i\mathrm{Vol}(P) + (1-\beta)\mathrm{Vol}(F)\Big) \sum_{\vec{a} \in P \cap (\mathbb{Z}/i)^n} \vec{a}.$$

**注意 3.4.** $\beta = 1$ の場合，定理 3.1 と系 3.3 は 小野 [6, 7] の結果と一致する．

## 4. Conical Kähler Einstein 計量の存在との関係

カレントの等式 $\mathrm{Ric}(\omega) = \beta\omega + (1-\beta)[D]$ をみたす $X$ の Kähler カレント $\omega$ を，$D$ に沿って cone angle $2\pi\beta$ をもつ Conical Kähler Einstein 計量という．Conical KE 計量の存在から対数的 K-(半) 安定性が従うことが知られている．そこで，注意 2.2.(2) から，「Conical KE から対数的 Chow 半安定性が従うか？」という問いは自然である．

**例 4.1.** $\underline{(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(i), (1-\beta_0)[0] + (1-\beta_\infty)[\infty])}$

この場合，系 3.3 の (LHS)$-$(RHS) $= \frac{1}{2}(i+1)(\beta_0 - \beta_\infty)$ となり，半安定ならば $\beta_0 = \beta_\infty$ が成立．これは Conical KE 計量が存在するための必要十分条件である．

**例 4.2.** $\underline{(X = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}, L^i = K_X^{-i}, D = (1 - \frac{13}{14})D_1 + (1 - \frac{13}{14})D_2 + (1 - \frac{5}{7})D_\infty)}$

ここで，$X$ を $\mathbb{C}P^1$ 上の $\mathbb{C}P^1$ 束と見ると，$D_1, D_2$ は $0, \infty \in \mathbb{C}P^1$ のファイバーで，$D_\infty$ は $\infty$-切断である．このとき，$\mathrm{Ric}(\omega) = \frac{6}{7}\omega + (1 - \frac{6}{7})[\frac{1}{1-\frac{6}{7}}D]$ をみたす Conical KE 計量が存在する [8]．しかしこの場合，系 3.3 の $(\mathrm{LHS}) - (\mathrm{RHS}) = (\frac{21}{10}i - \frac{5}{35})(1,1)^T$ となり，半安定でない．これは高次二木不変量 [2] に相当する障害が影響していると思われる．

## 参考文献


[1] S. K. Donaldson, *Discussion of the Kähler-Einstein problem*, notes on available on http://www2.imperial.ac.uk/ skdona/ .

[2] A. Futaki, *Asymptotic Chow semi-stability and integral invariants*, Internat. J. Math. 15 (2004), no. 9, 967-979.

[3] J. Li, X. Wang, *Hilbert-Mumford criterion for nodal curves*, Compos. Math. 151 (2015), no. 11, 2076-2130.

[4] D. Mumford, *Stability of projective varieties*, Eiseign. Math. (2), 23, (1977), 39-110.

[5] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory, Third edition*, Ergrb. Math. Grenstein. (2), 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[6] H. Ono, *A necessary condition for Chow semistability of polarized toric manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 63 (2011), 1377-1389.

[7] H. Ono, *Algebro-geometric semistability of polarized torirc manifolds*, Asian J. Math, 17 (2013), 609-616.

[8] J. Song and X. Wang, *The greatest Ricci lower bound, conical Einstein metrics and Chern number inequality*, Geom. Topol. 20 (2016), no. 1, 49-102.

[9] X. Wang and C. Xu, *Nonexistence of asymptotic GIT compactification*, Duke Math. J. 163 (2014), no. 12, 2217-2241.