新たなアプローチとしてのレゾルベントCCR環：KMS状態の存在性と一意性

九州大学大学院数理学府数理学専攻
博士後期課程1年
神田　智弘 (Tomohiro KANDA)*

1　背景

統計力学は，ミクロな構成単位が従う物理法則から，系全体の従うマクロな法則を導き出す理論である．ミクロな構成単位が古典力学に従うとき古典統計力学，量子力学に従うとき量子統計力学という．数理物理学においては，統計力学で考察される格子上の模型の平衡状態の一意性などが研究対象になる．空間の平衡状態に対応するのが KMS 状態である．KMS 状態とは，KMS(Kubo–Martin–Schwinger) 条件，量子統計力学において熱平衡状態にある系の性質を数学的に記述する条件を満たす状態のことである．

(X,σ) をシンプレクティック空間とし，$\mathfrak{H}$ をヒルベルト空間，$\Psi(f)$, $f\in X$ を f について線形な自己共役作用素とすると，

$$[\Psi(f),\Psi(g)] = i\sigma(f,g)\mathbb{1} \tag{1.1}$$

を満たすものを考える．ここで，$[A,B]=AB-BA$ である．式 (1.1) を満たす自己共役作用素は有界作用素で表されないことが一般に知られている．この $\Psi(f)$ は場の作用素とも呼ばれる，

$\mathcal{A}(X,\sigma)$ を $\{\,\Psi(f)\mid f\in X\,\}$ より生成される形式的な $*$-環とする．この環に対して，ハミルトニアン H より決定される時間発展，数学的には自己共役作用素 H より構成される形式的な 1 径数自己同型群

$$\alpha_t(A) = e^{itH}Ae^{-itH},\quad A\in\mathcal{A}(X,\sigma) \tag{1.2}$$

を解析したい．しかしながら，H や $A\in\mathcal{A}(X,\sigma)$ は非有界作用素であるため，定義域を決定しなければならないなどの数学的な困難が生ずる．この問題を解決するために，場の作用素を有界化した作用素の族から構成される C*-環を考える．ユニタリ作用素 $W(f)=\exp(i\Psi(f))$，$f\in X$ より構成される C*-環をワイル CCR 環と呼び，場の作用素のレゾルベント $R(\lambda,f)=(i\lambda\mathbb{1}-\Psi(f))^{-1}$, $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, f\in X$ より構成される C*-環をレゾルベント CCR 環と呼ぶ．ワイル CCR 環は，ボーズ・アインシュタイン凝縮の研究などに用いられてきた．しかし，ワイル CCR 環では物理的に興味のある 1 径数自己同型群をあまり定義できないことが知られている ([5]，[8])．2008 年に D. Buchholz と H. Grundling により定義されたレゾルベント CCR 環ではワイル CCR 環よりも豊

*t-kanda@math.kyushu-u.ac.jp

富な，物理的に興味のある 1 径数自己同型群を定義できることがわかった ([5]，[7])．そこで私たちは，レゾルベント CCR 環において 1 次元格子系を考え KMS 状態の一意性を示した [10]．

今回は，私たちの結果 [10] をスピン系における結果と対比しながら解説する．この研究は，松井卓教授との共同研究である．

2　スピン系における KMS 状態の一意性

スピン系における KMS 状態の一意性は 1 次元格子系と呼ばれるモデルで荒木 [1]，また 2 次元以上の格子系では高温領域での KMS 状態の一意性は様々な人々が証明している（詳細は [4] の 6 章の Note and Remarks）．最近，Fröhlich と Ueltschi により新たな手法で示された [9]．2 次元以上の格子系では，低温領域では KMS 状態は一意的にならないことが知られている．今回は $d=1$ のとき，荒木の手法を簡単に解説する．まずスピン系と 1 係数自己同型群を定義する．

2.1　スピン系と 1 径数自己同型群

まず，スピン系において器となる C*-環 (UHF 環と呼ばれる) を定義する．

定義 2.1. $\mathcal{C}$ が $*$-環であるとは，$\mathcal{C}$ は $\mathbb{C}$ 上の多元環であり，$\mathcal{C}$ 上の対合 (involution) $*:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ と呼ばれる全単射写像が存在し，

$$(\lambda A+\mu B)^*=\overline{\lambda}A^*+\overline{\mu}B^*,\quad (AB)^*=B^*A^*,\quad (A^*)^*=A \tag{2.3}$$

が任意の $A,B\in\mathcal{C}$ と $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ に対して成立することである．

$\mathcal{C}$ が C*-環であるとは，$\mathcal{C}$ は $*$-環であり，また $\mathcal{C}$ 上完備なノルム $\|\cdot\|$ が存在し，

$$\|AB\|\le\|A\|\|B\|,\quad \|A^*A\|=\|A\|^2 \tag{2.4}$$

が任意の $A,B\in\mathcal{C}$ について成立することである．

$d\in\mathbb{N}$ とする．$N\in\mathbb{N}$ を一つ固定し，任意の有限集合 $\Lambda\Subset\mathbb{Z}^d$($\Subset$ は有限集合) に対し，

$$\mathcal{A}_\Lambda=\bigotimes_{k\in\Lambda}M(N,\mathbb{C}) \tag{2.5}$$

とおく．ここで，$M(N,\mathbb{C})$ は複素数値 $N\times N$-行列全体である．このとき $\{\mathcal{A}_\Lambda\}_{\Lambda\Subset\mathbb{Z}^d}$ の帰納極限 (inductive limit) が存在し，C*-環となっている．この C*-環を $\mathcal{A}$ とかく．$\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}=\bigotimes_{k\in\mathbb{Z}^d}M(N,\mathbb{C}) \tag{2.6}$$

と書かれることもある．次に 1 径数自己同型群を $\mathcal{A}$ 上に定義する．まず，相互作用と呼ばれる作用素の族を定義する．$\Phi=\{\Phi(X)\}_{X\Subset\mathbb{Z}}$ が相互作用であるとは，任意の $X\Subset\mathbb{Z}^d$ に対して，$\Phi(X)^*=\Phi(X)\in\mathcal{A}_X$ となることで，$\Phi(\emptyset)=0$ と約束する．相互作用 Φ に対して，ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{r}}$ を

$$\|\Phi\|_{\mathrm{r}}:=\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{X\ni x}\|\Phi(X)\|r^{|X|} \tag{2.7}$$

と定義する．ここで，$\|\cdot\|$ は $\mathcal{A}$ のノルムで，$|X|$ は X の元の個数である．ここで，行列 A に対して A^* は A の転置を取り，各成分に複素共役をとったものである．X の直径を $\mathrm{diam}(X)$ とする．このとき，ある $R>0$ が存在して，$\mathrm{diam}(X)>R$ となる任意の $X \Subset \mathbb{Z}^d$ に対して，$\Phi(X)=0$ となるとき，Φ を有限有効距離相互作用 (finite-range interaction) と呼ぶ．$\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し，$\mathcal{A}_\Lambda$ 上の自己共役作用素 H_Λ を

$$H_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} \Phi(X) \tag{2.8}$$

と定義する．この H_Λ は物理的には局所的なハミルトニアンとなっている．$A \in \mathcal{A}_\Lambda$ に対し，

$$\alpha_t^\Lambda(A) := e^{itH_\Lambda} A e^{itH_\Lambda} \tag{2.9}$$

と定義すると，α^Λ は $\mathcal{A}_\Lambda$ 上の 1 径数自己同型群になっている．つまり，$\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha_t^\Lambda$ で $\alpha_{t_1}^\Lambda \circ \alpha_{t_2}^\Lambda = \alpha_{t_1+t_2}^\Lambda$，$\alpha_0^\Lambda = id$ かつ $\left\|\alpha_t^\Lambda\right\| = 1$ を満たす．ある $r>1$ に対して，$\|\Phi\|_r < \infty$ であれば $\mathcal{A}$ 上の 1 径数自己同型群 α が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\alpha_t(A) - \alpha_t^{\Lambda_n}(A)\right\| = 0 \tag{2.10}$$

が成立することが知られている ([4] や [13] など)．ここで，$A \in \mathcal{A}_\Lambda$ で極限は $\Lambda \subset \Lambda_1$，$\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$，$\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ となるような $\Lambda_n \Subset \mathbb{Z}^d$ をとる．

今回は，単位元を持つ C*-環しか扱わないので以下では単位元を持つことを仮定して定義を行うが，単位元を持たない場合でも定義できる．まず，C*-環上の状態を定義する．

定義 2.2. $\mathcal{C}$ を単位元を持つ C*-環，$\omega : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ の線形汎関数とする．$\omega(\mathbb{1}) = 1$ かつ $\omega(A^*A) \geq 0$ となるとき，ω を $\mathcal{C}$ 上の状態 (state) と呼ぶ．

次に，KMS 状態を定義する．

定義 2.3. $\mathcal{C}$ を単位元を持つ C*-環, ω を $\mathcal{C}$ 上の状態とする．また，γ を $\mathcal{C}$ 上の 1 径数自己同型群とし，$\beta>0$ とする．ω が γ 不変，つまり，任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して

$$\omega(\gamma_t(A)) = \omega(A), \tag{2.11}$$

かつ，任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して $I_\beta = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im} z < \beta \,\}$ 上で解析的，I_β の閉包 $\overline{I_\beta}$ 上で連続かつ有界であるような複素関数 $F_{A,B}$ が存在して，

$$F_{A,B}(t) = \omega(A\gamma_t(B)), \quad F_{A,B}(t+i\beta) = \omega(\gamma_t(B)A), \quad A, B \in \mathcal{C} \tag{2.12}$$

を満たすときに，ω を (γ,β)-*KMS* 状態であるという．

KMS 状態におけるパラメータ β は逆温度と呼ばれるもので，熱力学や統計力学において，$\beta = (kT)^{-1}$ で定義される．ここで，k はボルツマン定数，T は系の絶対温度である．KMS 状態の具体例としては以下である．

例 2.4. $M(N,\mathbb{C})$ 上のエルミート行列 H に対して，γ_t を

$$\gamma_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}, \quad A \in M(N,\mathbb{C}) \tag{2.13}$$

とおく．このとき，(γ,β)-*KMS* 状態 ω は

$$\omega(A)=\frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} \tag{2.14}$$

で与えられ，一意的である．

注意 2.5. $\mathcal{A}$ 上では一般に $\beta\in\mathbb{R}$ を仮定しても以下の話は成立するが，今回は $\beta\le 0$ については考えないことにする．

2.2　$d=1$ のときの KMS 状態の一意性

この節では，任意の $\Lambda\Subset\mathbb{Z}$ に対して，$W(\Lambda):=\sum_X\{\,\Phi(X)\mid X\Subset\mathbb{Z}, X\cap\Lambda\neq\emptyset, X\cap\Lambda^c\neq\emptyset\}$ としたときに，有限集合の増大列 $\Lambda_n\nearrow\mathbb{Z}$ に対して $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|W(\Lambda_n)\|<\infty$ を仮定する．このとき，以下が成立する．

定理 2.6. (荒木, 1975) 任意の $\beta>0$ に対して (α,β)-*KMS* 状態は一意的である．

まず (α,β)-KMS 状態を一つ構成する．$L\in\mathbb{N}$ に対して，$\Lambda_L:=(-L,L]\subset\mathbb{Z}$ とおく．また，$\mathcal{A}_L:=\mathcal{A}_{\Lambda_L}$，$H_L:=H_{\Lambda_L}$，$\alpha^L:=\alpha^{\Lambda_L}$ とする．$\mathcal{A}_L$ 上の (α^L,β)-KMS 状態 ω_L を

$$\omega_L(A)=\frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_L}A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_L})} \tag{2.15}$$

で定義する．$\mathcal{A}$ は任意の $X\subset\mathbb{Z}$ に対し $\mathcal{A}=\mathcal{A}_X\otimes\mathcal{A}_{X^c}$ と分解できる．τ_{L^c} を $\mathcal{A}_{\Lambda_L^c}$ 上のトレース（このトレースは一意的に存在する．）とし，$\omega_L\otimes\tau_{L^c}$ を考える．以下，この状態も同様に ω_L とかく．$\mathcal{A}$ は単位的 C*-環なので，$\{\omega_L\}_{L\in\mathbb{N}}$ は集積点をもつ．この集積点を ω とする．このとき，ω は (α,β)-KMS 状態となっている．

定理 2.6 は，以下の 2 つの補題を用いて示される．まず，$\mathcal{A}$ 上の KMS 状態についての特徴づけを述べる．

補題 2.7. Φ を $\mathcal{A}$ 上の相互作用とする．$\Lambda\Subset\mathbb{Z}$ に対して，α^Λ を式 (2.9) で定義された $\mathcal{A}_\Lambda$ 上の 1 径数自己同型群とする．α^Λ が $\mathcal{A}$ 上のある *1* 径数自己同型群 α に強収束することと $\|W(\Lambda)\|$ が well-defined な $\mathcal{A}$ の元であることを仮定すると $\mathcal{A}$ 上の状態 ω と $\beta>0$ に対し以下は同値．

1. 状態 ω は (α,β)-*KMS* 状態である．
2. ω はギブズ条件，*GNS* 巡回ベクトル ξ_ω が $\pi_\omega(\mathcal{A})''$ に対し，分離的であることと

$$\omega^{P_\Lambda}=\omega_\Lambda\otimes\tilde{\omega} \tag{2.16}$$

が任意の $\Lambda\Subset\mathbb{Z}$ に対して成立する．ここで，ω_Λ は式 *(2.15)* で定義された $\mathcal{A}_\Lambda$ 上の状態で $\tilde{\omega}$ は $\mathcal{A}_{\Lambda^c}$ 上の状態，ω^{P_Λ} は $P_\Lambda=\beta W(\Lambda)$ で摂動した状態である．

注意 2.8. ここでは，摂動した状態について定義せず，簡単な場合の具体例を紹介することに止める（詳しくは，[4, Theorem 5.4.4.].）．例 2.4 の状況において，$W \in M(N, \mathbb{C})$，$W = W^*$ とする．βW で ω を摂動した状態 ω^W は，

$$\omega^W(A) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta(H-W)}A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta(H-W)})} \tag{2.17}$$

で与えられる．

定義 2.9. $\mathcal{C}$ を C*-環とする．このとき，$\mathcal{C}$ 上の表現 $(\mathfrak{H}_1, \pi_1)$ と $(\mathfrak{H}, \pi_2)$ が準同値であるとは，同型写像 $\sigma : \pi_1(\mathcal{C})'' \to \pi_2(\mathcal{C})''$ が存在して，$\sigma(\pi_1(A)) = \pi_2(A)$，$A \in \mathcal{C}$ となることである．ここで，$\mathfrak{H}$ をヒルベルト空間としたとき，$M \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ に対して，$M' = \{\, A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \mid AB = BA, B \in M \,\}$ である．$\mathcal{C}$ 上の状態 ω_1 と ω_2 が準同値であるとは，それぞれの GNS 表現が準同値であるときをいう．

定義 2.10. $\mathcal{C}$ 上の表現 $(\mathfrak{H}_1, \pi_1)$ と $(\mathfrak{H}, \pi_2)$ に対して，π_1 の部分表現が π_2 と準同値であるとき，π_1 は π_2 を準包含しているという．$\mathcal{C}$ 上の状態 ω_1 と ω_2 に対して，それぞれの *GNS* 表現 π_1 と π_2 に対して，π_1 が π_2 を準包含している時 ω_1 は ω_2 を準包含しているという．

$\mathcal{A}$ 上の状態に対して，準包含を特徴付ける条件を知りたい．ここで，状態に対する相対エントロピーを考える．詳しくは述べないが，2 つの状態に対する距離のようなものである．特に，正定値 $N \times N$ 行列 A, B（つまり $\sigma(A), \sigma(B) \subset (0, \infty)$，ここで $\sigma(A)$ は A のスペクトラム）に対しては

$$S(A, B) = \mathrm{Tr}(A \log A - A \log B) \tag{2.18}$$

で与えられる．行列空間上の 2 つの状態に対する相対エントロピーは状態から定まる密度行列について相対エントロピーで定義する．

$\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_{(-L,L]}$ とおく．このとき，相対エントロピーを用いることで，以下が示せる．

補題 2.11. ϕ_1 と ϕ_2 を $\mathcal{A}$ 上の状態とする．

$$\sup_{L \in \mathbb{N}} S(\phi_1 \restriction_{\mathcal{A}_L}, \phi_2 \restriction_{\mathcal{A}_L}) \equiv \mu < \infty, \tag{2.19}$$

が成立するならば，π_2 は π_1 を準包含する．ここで，π_j は ψ_j $(j = 1, 2)$ に付随する *GNS* 表現である．

定理 2.6 証明の概略

ψ を因子的 (α, β)-KMS 状態，つまり ψ に関する GNS 表現が規約表現になっているとする．このとき，上で構成した (α, β)-KMS 状態 ω との相対エントロピーを計算することで，一意性を示す．相対エントロピーに関して次が言える．$C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|W(\Lambda_n)\|$，また $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\beta W(\Lambda_N)$ で摂動した状態を ψ^N とおくと，$L \leq N$ に対して，

$$S(\psi^N \restriction_{\mathcal{A}_L}, \psi \restriction_{\mathcal{A}_L}) \leq 4\beta C. \tag{2.20}$$

$L \leq N$ のとき，$\psi^N \restriction_{\mathcal{A}_L} = \omega_N \restriction_{\mathcal{A}_L}$ である．ここで，ω_N は式 (2.15) で定義された状態である．また，相対エントロピーには下半連続性があるので，

$$S(\omega \restriction_{\mathcal{A}_L}, \psi \restriction_{\mathcal{A}_L}) \leq \liminf_{N \to \infty} S(\omega_N \restriction_{\mathcal{A}_L}, \psi \restriction_{\mathcal{A}_L}) \leq 4\beta C \tag{2.21}$$

となる．補題 2.11 より，ψ と ω は準包含の関係があることがわかる．最後にフォンノイマン環論における富田竹崎の定理を用いると，一意性が示せる．□

注意 2.12. $d \geq 2$ のときの *KMS* 状態の一意性は $\beta > 0$ によって状況が異なる．まず高温領域，つまり β が十分小さいときは以下が示されている．

定理 2.13. (J. Fröhlich, D. Ueltschi, 2015)

相互作用 Φ と $\beta > 0$ が

$$\beta \|\Phi\|_{N+1} < \frac{1}{2N} \tag{2.22}$$

を満たすとき，(α, β)-*KMS* 状態は一意的である．

低温領域，つまり β が大きいときは非一意性が導かれることが知られている．詳しくは [4] の 6.2.6 節を見よ．

3　レゾルベント CCR 環における KMS 状態の一意性

私たちはスピン系におけるアナロジーを用いてレゾルベント CCR 環における KMS 状態の一意性を示した [10]．この章では，その結果についての簡単な解説を行う．

3.1　定義

シンプレクティック空間 (X, σ) に対して，集合

$$\mathcal{R}_0(X, \sigma) = \{ R(\lambda, f) \mid \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, f \in X \} \tag{3.23}$$

を考える．$\mathcal{R}_0(X, \sigma)$ の元 $R(\lambda, f)$ は以下の関係式を満たすとする．

$$\begin{aligned}
R(\lambda, 0) &= -\frac{i}{\lambda}\mathbb{1}, && (3.24)\\
R(\lambda, f)^* &= R(-\lambda, f), && (3.25)\\
\nu R(\nu\lambda, \nu f) &= R(\lambda, f), && (3.26)\\
R(\lambda, f) - R(\mu, f) &= i(\mu - \lambda) R(\lambda, f) R(\mu, f), && (3.27)\\
[R(\lambda, f), R(\mu, g)] &= i\sigma(f, g) R(\lambda, f) R(\mu, g)^2 R(\lambda, f), && (3.28)\\
R(\lambda, f) R(\mu, g) &= R(\lambda + \mu, f + g)\{R(\lambda, f) \\
&\quad + R(\mu, g) + i\sigma(f, g) R(\lambda, f)^2 R(\mu, g)\}, \quad (\lambda \neq -\mu) && (3.29)
\end{aligned}$$

ここで $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ と $f, g \in X$ である．

(3.25) は，$\Psi(f)$ の自己共役性，(3.26) と (3.29) が $\Psi(f)$ の f に関する線形性，(3.27) がレゾルベント公式，(3.28) が CCR を表している．

$\mathcal{R}_0(X, \sigma)$ の表現 π をとると，$\|\pi(R(\lambda, f))\| \leq |\lambda|^{-1}$ となることがわかる．よって，普遍的ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{u}}$ を

$$\|A\|_{\mathrm{u}} := \sup \{ \|\pi_\omega(A)\| \mid \omega \in S(\mathcal{R}_0(X, \sigma)) \} \tag{3.30}$$

と定義する．ここで，$\omega \in S(\mathcal{R}_0(X,\sigma))$ は $\omega : \mathcal{R}_0(X,\sigma) \to \mathbb{C}$，$\omega(A^*A) \geq 0$，$A \in \mathcal{R}_0(X,\sigma)$，$\omega(\mathbb{1}) = 1$ を満たすもの全体の集合である．このノルムで $\mathcal{R}_0(X,\sigma)$ を完備化した C*-環をレゾルベント CCR 環と呼び，$\mathcal{R}(X,\sigma)$ とかく．

3.2 表現

レゾルベント CCR 環における特別な表現として正則表現と呼ばれるものがある．

定義 3.14. レゾルベント *CCR* 環 $\mathcal{R}(X,\sigma)$ の表現 $(\mathfrak{H},\pi)$ が正則表現であるとは，

$$\ker \pi(R(\lambda,f)) = \{0\} \tag{3.31}$$

が任意の $f \in X$ と $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対して成立することである．

また，レゾルベント *CCR* 環 $\mathcal{R}(X,\sigma)$ 上の状態 ω に付随する GNS 表現が正則であるとき，ω を正則状態と呼ぶ.

これは，表現空間において場の作用素が定義できるというものである．実際，擬レゾルベントの議論（詳細は [14]）により $\pi(R(\lambda,f)) = (i\lambda\mathbb{1} - \Psi_\pi(f))^{-1}$ となることがわかる．$\Psi_\pi(f)$ が CCR を満たすことは多少の計算が必要である [5, Theorem 4.2.]．表現の具体例としては以下がある．

例 3.15. シンプレクティック空間として $(\mathbb{R}^{2n},\sigma)$，$n \in \mathbb{N}$，を考える．ここで，σ は $\mathbb{R}^{2n}$ の標準基底 q_k, p_k，$k = 1,\cdots,n$ に対して，

$$\sigma(q_j,p_k) = \delta_{jk} = -\sigma(p_j,q_k), \quad \sigma(q_j,q_k) = 0 = \sigma(p_j,p_k) \tag{3.32}$$

と定義する．ここで，δ_{jk} はディラックのデルタである．$\mathcal{R}(\mathbb{R}^{2n},\sigma)$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の表現 π_0 を

$$\pi_0(R(\lambda, \sum_{k=1}^{n}(a_k q_k + b_k p_k))) = (i\lambda\mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n}(a_k x_k + b_k(-i\frac{\partial}{\partial x_k})))^{-1} \tag{3.33}$$

とおく．ここで，x_k は掛け算作用素であり，$\frac{\partial}{\partial x_k}$ は微分作用素である．この表現はシュレーディンガー表現と呼ばれる．

例 3.16. ヒルベルト空間 $\mathfrak{h}$ 上のボーズフォック空間 $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ というものを紹介する．ヒルベルト空間 $\mathfrak{h}$ に対するフォック空間 $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ とは,

$$\mathcal{F}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{h}^k \tag{3.34}$$

で定義される空間である．ここで，$\mathfrak{h}^k$ は $\mathfrak{h}$ を k 回テンソルしたヒルベルト空間であり，$\mathfrak{h}^0 = \mathbb{C}$ と約束する．任意の $n \in \mathbb{N}$ と $f \in \mathfrak{h}$ に対して，生成作用素 $a^*(f)$ と消滅作用素 $a(f)$ を

$$a^*(f)f_1\otimes\cdots\otimes f_n = \sqrt{n+1}f\otimes f_1\otimes\cdots\otimes f_n, \quad a(f)f_1\otimes\cdots\otimes f_n = \sqrt{n}\langle f,f_1\rangle f_2\otimes\cdots\otimes f_n \tag{3.35}$$

とおく．ここで $f_1,\cdots,f_n \in \mathfrak{h}$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathfrak{h}$ 上の内積である．これらは，稠密な空間上で定義された作用素となる．

次に，$\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ 上の射影 P_+ を定義する．任意の $n \in \mathbb{N}$ と $f_1, \cdots, f_n \in \mathfrak{h}$ に対して

$$P_+(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (n!)^{-1} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)} \tag{3.36}$$

とおく．ここで，S_n は n 次の置換群である．このようにおくと P_+ は，有界な稠密に定義された作用素であることがわかるので，$\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ 全体への拡張が一意的に存在する．この拡張も P_+ と書くことにする．ボーズフォック空間 $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ を

$$\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}) = P_+\mathcal{F}(\mathfrak{h}) \tag{3.37}$$

と定義する．$f \in \mathfrak{h}$ に対して，この空間上の生成演算子 $a_+^*(f)$ と $a_-(f)$ を

$$a_+^*(f) = P_+a^*(f)P_+, \quad a_+(f) = P_+a(f)P_+ \tag{3.38}$$

とおき，また

$$\Psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(a_+^*(f) + a_+(f))} \tag{3.39}$$

とおくと，$\Psi(f)$ は自己共役作用素であり CCR を満たす．ここで，$\overline{(a_+^*(f) + a_+(f))}$ は作用素 $a_+^*(f) + a_+(f)$ の閉包である．なので，$f, g \in \mathfrak{h}$ に対して，$\sigma(f,g) = \mathrm{Im}\langle f, g\rangle$ とおくと，$(\mathfrak{h}, \sigma)$ はシンプレクティック空間であり，π_F を

$$\pi_F(R(\lambda, f)) = (i\lambda\mathbb{1} - \Psi(f))^{-1} \tag{3.40}$$

とおくと，これは $\mathcal{R}(\mathfrak{h}, \sigma)$ の表現となっている．この表現をフォック表現と呼ぶ．

任意の集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ に対して，$c_c(\Lambda)$ を有限の台を持つ関数 $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ 全体の集合とする．このとき，$c_c(\Lambda) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ である．ここで，$\ell^2(\mathbb{Z})$ は 2 乗和が有界である $\mathbb{C}$ 上の数列全体である．$f, g \in c_c(\Lambda)$ に対して $\sigma(f,g) = \mathrm{Im}\langle f, g\rangle_{\ell^2}$ とおくと，$(c_c(\Lambda), \sigma)$ はシンプレクティック空間になっている．ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2}$ は $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の標準内積である．$L \in \mathbb{N}$ に対して，$\Lambda_L = (-L, L] \subset \mathbb{Z}$ とおく．以下では，$\mathcal{R}(c_c(\Lambda_L), \sigma)$ を単に $\mathcal{R}_L$，また，$\mathcal{R}(c_c(\mathbb{Z}), \sigma)$ を $\mathcal{R}$ とかく．

3.3　1 系数自己同型群

まず $\pi_0(\mathcal{R}_L)$，$L \in \mathbb{N}$ に対して，1 径数自己同型群が定義できることを示す．以下では，次のような $L^2(\mathbb{R}^{2L+1})$ 上の自己共役作用素 H_L を考える:

$$H_L := \sum_{-L<k\leq L}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 + V(x_k)\right) + \sum_{-L<k<L} \varphi(x_k - x_{k+1}). \tag{3.41}$$

ここで，V, φ は $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値急減少関数である．このとき，以下が示せる．

命題 3.17. α^L を

$$\tilde{\alpha}_t^L(A) = e^{itH_L}Ae^{itH_L}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \tag{3.42}$$

と定義すると，α^L は $\pi_0(\mathcal{R}_L)$ 上の 1 径数自己同型群となっている．

π_0 は忠実な表現，つまり，$\ker \pi = \{0\}$ となっている．よって，

$$\alpha_t^L(A) := \pi_0^{-1}(\tilde{\alpha}_t^L(\pi_0(A))), \quad A \in \mathcal{R}_L \tag{3.43}$$

とおくと，α^L は $\mathcal{R}_L$ 上の 1 径数自己同型群である

さらに，Lieb–Robinson の評価（[11], [12], [13]）というものを用いると，以下が示せる．

命題 3.18. α^L に対して，ノルム極限

$$\alpha_t(A) = \lim_{L\to\infty} \alpha_t^L(A) \tag{3.44}$$

が存在して，α は $\mathcal{R}$ 上の *1* 径数自己同型群となっている．

以下で，この α に対する KMS 状態を考える．

3.4 KMS 状態

まず KMS 状態を構成する．ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_L$ を $\mathfrak{H}_L := L^2(\mathbb{R}^{2L+1}) \otimes \mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}))$ とおく．H^0 として

$$H^0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 x^2 \tag{3.45}$$

と定義する．このとき，$e^{-\beta H_L} \otimes e^{-\beta d\Gamma(H^0)}$ は $\mathfrak{H}_L$ 上でトレースクラス作用素になっている．ここで，$d\Gamma(H^0)$ は H^0 の第 2 量子化された作用素であり，詳しい解説は省略するが H^0 をボゾンフォック空間に持ち上げた作用素である．詳しくは [4]．$\pi = \pi_0 \otimes \pi_F$ とおく．このとき，$\mathcal{R}$ 上の状態 ω_L を

$$\omega_L(A) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_L} \otimes e^{-\beta d\Gamma(H^0)}\pi(A))}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_L} \otimes e^{-\beta d\Gamma(H^0)})} \tag{3.46}$$

とおくと，これは正則な状態となっている．$\{\omega_L\}_{L\in\mathbb{N}}$ は単位的 C*-環上の状態の族であり，これは集積点 ω をもつ．この ω は正則な (α, β)-KMS 状態になっていることがわかる．

スピン系における補題 2.7 と補題 2.11 が次のように書きかわる．

命題 3.19. ψ を $\mathcal{R}$ 上の正則な (α, β)-*KMS* 状態とする．ここで，α は命題 3.18 で定義された 1 径数自己同型群であり，$\beta > 0$ である．$W(L) := \varphi(x_L - x_{L+1}) + \varphi(x_{-L+1} - x_{-L})\,(L \in \mathbb{N})$ とおく．

$$\psi^{\beta W(L)} = \psi_L \otimes \widetilde{\psi} \tag{3.47}$$

を満たす．ここで，$\widetilde{\psi}$ は $\mathcal{R}_{L^c}$ 上の状態で，$\psi^{\beta W(L)}$ は状態 ψ を $\beta\pi_\psi(W(L))$ で摂動したものである．

補題 3.20. ψ_1 と ψ_2 を $\mathcal{R}$ 上の正則状態とする．

$$\sup_{L\in\mathbb{N}} S(\phi_1 \restriction_{\mathcal{R}_L}, \phi_2 \restriction_{\mathcal{R}_L}) \equiv \mu < \infty, \tag{3.48}$$

が成立するならば，π_2 は π_1 を準包含する．ここで，π_j は $\psi_j\,(j = 1, 2)$ に付随する *GNS* 表現である．

定理 2.6 の証明と同様に議論を行うと，以下が示せる．

定理 3.21. $\beta > 0$ かつ正則な (α, β)-*KMS* 状態は一意的に存在する．

注意 3.22. 正則でない (α, β)-*KMS* 状態は多数存在する．例えば，[7] を見よ．

参考文献

[1] H. Araki, *On uniqueness of KMS states of one-dimensional quantum lattice systems,* Comm. Math. Phys. **44**, no. 1, 1–7 (1975).

[2] H. Araki, *Relative entropy of states of von Neumann algebras,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **13**, 173–192 (1977).

[3] H. Araki, *Relative entropy for states of von Neumann algebras* II*,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **11**, 809–833 (1976).

[4] O. Bratteli and D. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics II*, 2nd edition (Springer, 1997).

[5] D. Buchholz and H. Grundling, *The resolvent algebra: A new approach to canonical quantum systems,* J. Funct. Anal. **254**, 2725–2779 (2008)

[6] D. Buchholz, *The resolvent algebra: ideals and dimension,* J. Funct. Anal. **266**, 3286–3302 (2014)

[7] D. Buchholz, *The resolvent algebra for oscillating lattice systems: Dynamics, ground and equilibrium states*, arXiv: 1605.05259

[8] M. Fannes and A. Verbeure, *On the Time Evolution Automorphisms of the CCR-Algebra for Quantum Mechanics,* Comm. Math. Phys. **35**, 257–264(1974)

[9] J. Fröhlich and D. Ueltschi, *Some properties of correlations of quantum lattice systems in thermal equilibrium*, J. Math. Phys. **56**, no. 5, 053302, 13 pp (2015).

[10] T. Kanda and Taku Matsui, *Regular KMS states of weakly coupled anharmonic crystals and the resolvent CCR algebra*, arXiv:1601.04809

[11] B. Nachtergaele, H. Raz, B. Schlein and R. Sims, *Lieb-Robinson bounds for harmonic and anharmonic lattice systems,* Comm. Math. Phys. **286**, 1073–1098 (2009).

[12] B. Nachtergaele and R. Sims, *Lieb-Robinson bounds in quantum many-body physics,* Entropy and the quantum, 141–176, Contemp. Math. **529**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2010.

[13] B. Nachtergaele and R. Sims, *On the dynamics of lattice systems with unbounded on-site terms in the Hamiltonian,* arXiv:math-ph/1410.8174

[14] K. Yoshida, *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.