離散時間 1 次元 2 状態量子ウォークの局在化

布田 徹 (FUDA Toru)*

概要

離散時間 1 次元 2 状態量子ウォーク，特にスプリット・ステップ量子ウォークを一般化したモデルを考える．このモデルの局在化と呼ばれる現象の生起について詳しく見る．局所化とは，大雑把に言って「長時間極限において，存在確率が正の値を持つような特別な $\mathbb{Z}$ の元が存在する」という現象であり，量子ウォークにおいては主要な研究対象の一つである．本講演では，モデルの定義からはじめ，スプリット・ステップ量子ウォークと我々のモデルの関係・局所化と固有値の関係・局在化のための十分条件等を紹介する．本研究は船川大樹氏 (北海道大学)，鈴木章斗氏 (信州大学) との共同研究に基づく．

Keywords. 離散時間量子ウォーク，スプリット・ステップ量子ウォーク，局在化，固有値.

1　モデルの定義

次のように定義される離散時間 1 次元 2 状態量子ウォークを考える．まず，量子系の状態空間として，$\mathbb{Z}$ 上の $\mathbb{C}^2$-値 2 乗可積分なヒルベルト空間

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^2) = \left\{ \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \sum_{x\in\mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty \right\}$$

を考える．ただし，任意の $\Psi \in \mathcal{H}$ に対して，その $x \in \mathbb{Z}$ における値を $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ と表し，内積は各元 $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \langle \Psi(x), \Phi(x) \rangle_{\mathbb{C}^2} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left\{ \overline{\Psi_1(x)}\Phi_1(x) + \overline{\Psi_2(x)}\Phi_2(x) \right\}$$

で与える．$p^2 + |q|^2 = 1$ を満たす組 $(p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{H}$ 上の線形作用素 S を

$$(S\Psi)(x) = \begin{pmatrix} p\Psi_1(x) + q\Psi_2(x+1) \\ \bar{q}\Psi_1(x-1) - p\Psi_2(x) \end{pmatrix} \quad \left(\forall \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathbb{Z}\right)$$

* 北海道大学大学院理学研究院数学部門，E-mail: t-fuda@math.sci.hokudai.ac.jp

と定義し，これを**シフト作用素**と呼ぶ．2 次ユニタリ行列の族 $\{C(x)\}_{x\in\mathbb{Z}}$ に対して，$\mathcal{H}$ 上の線形作用素 C を $C=\bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} C(x)$, i.e.,

$$(C\Psi)(x)=C(x)\Psi(x) \quad (\forall\Psi\in\mathcal{H}, \forall x\in\mathbb{Z})$$

と定義し，これを**コイン作用素**と呼ぶ．これらを用いて，単位時間当たりの量子系の時間発展を記述する $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U を以下のように定義する：

$$U=SC.$$

したがって，正規化された初期状態 $\Psi_0\in\mathcal{H}$ に対し，時刻 $t\in\mathbb{Z}$ の状態を Ψ_t とすると，

$$\Psi_t=U^t\Psi_0$$

が成り立つ．例えば，この量子系が $\mathbb{Z}$ 上を運動する内部自由度 2 の一粒子系 (一電子系，一光子系など) のものであると考えると，時刻 $t\in\mathbb{Z}$ において粒子が位置 $x\in\mathbb{Z}$ に存在する確率は $\|\Psi_t(x)\|^2_{\mathbb{C}^2}$ である．この確率の長時間極限における挙動を調べるため，局在化と呼ばれる概念を次のように導入する．

定義 1.1（**局在化**） 正規化された初期状態 $\Psi_0\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\exists x\in\mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad \limsup_{t\to\infty}\|(U^t\Psi_0)(x)\|^2_{\mathbb{C}^2}>0 \tag{1.1}$$

が成り立つとき，**局在化が起きる**という．

先の内部自由度 2 の一粒子系の例で言うならば，局在化とは，長時間極限をとった後でも粒子の存在確率が 0 にならないような特別な位置が存在するという現象である．自明な場合を除き，上で定義した局在化に相当する現象は，古典的なランダムウォークには存在しない．したがって，局在化は真に量子力学的現象であるといえる．我々の量子ウォークのモデルにおいて，どのような場合に局在化が起きるのかが本講演の主題である．

$p=0$ のとき，よく知られている 1 次元 2 状態量子ウォークとユニタリ同値になり ([3])，局在化に関するいくつかの研究がある ([2])．しかし，$p\neq 0$ の場合を扱った数学的な研究はほとんどみられない．

2 モデルの背景：1 次元スプリット・ステップ量子ウォーク

$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素

$$U_{ss}(\theta_1,\theta_2)=S_-R(\theta_2)S_+R(\theta_1), \quad \theta_1,\theta_2\in[0,2\pi)$$

を単位時間当たりの時間発展作用素とする量子ウォークを**スプリット・ステップ量子ウォーク**という ([1])．ただし，$S_\pm, R(\theta_i)$ $(i=1,2)$ は以下で定義される $\mathcal{H}$ 上の線形作用素である：

$$(S_+\Psi)(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x-1) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (S_-\Psi)(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x+1) \end{pmatrix},$$
$$(R(\theta_i)\Psi)(x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i/2) & -\sin(\theta_i/2) \\ \sin(\theta_i/2) & \cos(\theta_i/2) \end{pmatrix} \Psi(x), \quad (\forall \Psi = {}^t(\Psi_1, \Psi_2) \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathbb{Z}).$$

また，上の定義で，θ_1 を $\mathbb{Z}$ 上の実数値関数 $\theta_1 = \theta_1(x)$ で置き換えてもよい．

前節で定義した $U = SC$ は，次の意味で $U_{ss}(\theta_1, \theta_2)$ の一般化となることがわかる．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ p = \sin(\theta_2/2),\ q = \cos(\theta_2/2),\ C(x) = R(\theta_1(x))\sigma_1$$

とすると，次が成り立つ：

$$U = \sigma_1 U_{ss}(\theta_1, \theta_2)\sigma_1.$$

つまり，この設定の下では，U と $U_{ss}(\theta_1, \theta_2)$ はユニタリ同値である．

3　局在化の十分条件

以下，我々のモデル $U = SC$ が局在化を起こすための条件を調べる．次の補題は有用である．

補題 3.1　(1.1) は以下と同値である．

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad \ker(U-\lambda) \neq \{0\}, \Psi_0 \notin (\ker(U-\lambda))^\perp. \tag{3.1}$$

つまり，局在化は，初期状態 Ψ_0 が U の固有空間とオーバーラップするとき生起する．初期状態 Ψ_0 が任意にとれるとすると，局在化が起きるためには U が固有値を持つことが必要十分である．

スプリット・ステップ量子ウォークでは，$C(x) = R(\theta_1(x))\sigma_1$ がユニタリかつ自己共役になっている．そこで，以下，我々が定めた $U = SC$ のモデルにおいても，$C(x)$ がユニタリかつ自己共役であると仮定し，U が固有値を持つための十分条件を与える．この仮定により，$C(x)$ の固有値の候補は ± 1 のみであることがわかる．さらに，$\dim\ker(C(x)-1) = 1$ を仮定し，

$$\chi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \end{pmatrix} \in \dim\ker(C(x)-1), \quad \|\chi(x)\|_{\mathbb{C}^2} = 1$$

とする．これらの仮定により $C(x)$ は ± 1 の固有値をもつので，スペクトル分解により，

$$C(x) = 2|\chi(x)\rangle\langle\chi(x)| - 1 \tag{3.2}$$

が成り立つ．したがって，$\chi(x)$ と $C(x)$ は一対一に対応することがわかる．また，自明な場合を避けるため，$|p| \neq 1, \chi_1(x)\chi_2(x) \neq 0$ とする．

次の定理は本講演の主結果である．

定理 3.2　次の条件を満たすとき，U は固有値 ± 1 をもつ：

$$\limsup_{x\to+\infty}\left|\frac{(p\pm 1)\overline{\chi_2(x)}}{q\overline{\chi_1(x)}}\right| < 1, \quad \limsup_{x\to-\infty}\left|\frac{q\overline{\chi_1(x)}}{(p\pm 1)\overline{\chi_2(x)}}\right| < 1. \quad \text{(複合同順)} \tag{3.3}$$

証明には，ユニタリかつ自己共役な二つの作用素の積に関するスペクトル写像定理 ([4]) を用いる．我々のモデルは，シフト作用素 S とコイン作用素 C がともにユニタリかつ自己共役であることに注意せよ．

最後に，簡単な応用例を述べる．

例 3.3　$0 < \epsilon \ll 1$ とし，$\chi(x)$ が次を満たすとする：

$$\lim_{x\to+\infty}\chi(x) = \begin{pmatrix}\sqrt{1-\epsilon^2}\\ \epsilon\end{pmatrix}, \lim_{x\to-\infty}\chi(x) = \begin{pmatrix}\epsilon\\ \sqrt{1-\epsilon^2}\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

このとき，$p^2+|q|^2=1$ かつ $|p|\neq 1$ を満たす任意の $(p,q)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ に対して，(3.3) が成り立つので，局在化が起きる．(3.2) に注意すると，条件 (3.4) は以下のコイン作用素 C についての条件と同値であることがわかる：

$$\lim_{x\to+\infty} C(x) = C_+ := \begin{pmatrix} 1-2\epsilon^2 & 2\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2} \\ 2\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2} & 2\epsilon^2-1\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} C(x) = C_- := \sigma_1 C_+ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 2\epsilon^2-1 & 2\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2} \\ 2\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2} & 1-2\epsilon^2\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

参考文献

[1] T. Kitagawa, M. S. Rudner, E. Berg, E. Demler, Exploring topological phases with quantum walks, *Phys. Rev. A* (2010).

[2] 今野 紀雄, 量子ウォーク, 森北出版株式会社 (2014).

[3] H. Ohno, Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks, *Quantum Inf. Process.* (2016).

[4] Yu. Higuchi, E. Segawa, A. Suzuki, Spectral mapping theorem of an abstract quantum walk, preprint (arXiv:1506.06457).