n 次元実射影空間のオブザーバブル直径

中島 啓貴 Hiroki Nakajima (東北大学大学院理学研究科数学専攻) *

1 序文

集合 X が距離 d_X と測度 μ_X を備えているとき，三つ組 (X, d_X, μ_X) を測度距離空間という．M.Gromov は測度の集中現象を考察し，測度距離空間の枠組みにおいて，種々の概念や不変量を考案した [2]．Gromov が定義したものの一つに 1-メジャーメントがある．測度距離空間のうち完備可分な距離とボレル確率測度を備えたものを mm-空間と呼ぶが，1-メジャーメントは mm-空間に対して以下のように定義される．

定義 1.1 (1-メジャーメント). (X, d_X, μ_X) を mm-空間とする．このとき，X の **1-メジャーメント**は

$$\mathcal{M}(X;1) := \{ f_*\mu_X \mid f : X \to \mathbb{R} : 1\text{-リプシッツ} \}$$

で定義される．

ここで，関数 f が 1-リプシッツであるとはリプシッツ定数が 1 以下のリプシッツ関数であることである．また，$f_*\mu_X$ は μ_X の f による押し出し測度で，任意のボレル集合 $A \subset X$ に対して，$f_*\mu_X(A) := \mu_X(f^{-1}(A))$ で定義される．

mm-空間同士にはリプシッツ順序と呼ばれる順序関係が定まる．特に，実数空間 $\mathbb{R}$ に通常の距離 $|\cdot|$ と 1-メジャーメントの元 μ を備えた mm-空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|, \mu)$ を考えるとこれをリプシッツ順序において比較することができる．リプシッツ順序は以下のように定義される．

定義 1.2 (リプシッツ順序). X と Y を mm-空間とする．X が Y を**支配する**とは，ある 1-リプシッツ写像 $f : X \to Y$ が存在し，

$$f_*\mu_X = \mu_Y$$

を満たすことをいう．これを $Y \prec X$ と書く．関係 $\prec$ を**リプシッツ順序**という．

本講演では，n 次元球面や n 次元実射影空間の 1-メジャーメントにおいてリプシッツ順序に関しての最大元が存在するか，存在する場合はどのような測度になっているかという問題への取り組みを述べる．この問題を考える動機は，M.Gromov が定義したオブザーバブル直径に由来する．オブザーバブル直径は測度の集中現象において重要な役割を果たす不変量であり，パーシャル直径を用いて以下のように定義される．

*hiroki.nakajima.s4@dc.tohoku.ac.jp

定義 1.3 (パーシャル直径). X を mm-空間とする．実数 $\alpha \in [0,1]$ に対し，**パーシャル直径** $\mathrm{diam}(X;\alpha) = \mathrm{diam}(\mu_X;\alpha)$ を以下で定義する．

$$\mathrm{diam}(X;\alpha) := \inf \{ \mathrm{diam}\, A \mid \mu_X(A) \geq \alpha,\ A \in \mathcal{B}_X \}.$$

ここで $A \neq \emptyset$ のとき $\mathrm{diam}\, A := \sup_{x,y \in X} d_X(x,y)$，$\mathrm{diam}\, \emptyset := 0$ と定義する．

定義 1.4 (オブザーバブル直径). (X, d_X, μ_X) を mm-空間とする．$\kappa \in [0,1]$ に対して，X の **κ-オブザーバブル直径** $\mathrm{ObsDiam}(X;-\kappa)$ と**オブザーバブル直径** $\mathrm{ObsDiam}(X)$ を以下で定義する．

$$\mathrm{ObsDiam}(X;-\kappa) := \sup \{ \mathrm{diam}(f_*\mu_X; 1-\kappa) \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ は 1-リプシッツ写像} \},$$
$$\mathrm{ObsDiam}(X) := \inf_{\kappa \in [0,1]} \max \{ \mathrm{ObsDiam}(X;-\kappa), \kappa \}.$$

(κ-) オブザーバブル直径とパーシャル直径はリプシッツ順序に関して単調増加である．すなわち特にパーシャル直径に関して述べると $X \prec Y$ なら $\mathrm{diam}(X;1-\kappa) \leq \mathrm{diam}(Y;1-\kappa)$ が成り立つ．1-メジャーメント $\mathcal{M}(X;1) := \{ f_*\mu_X \mid f : X \to \mathbb{R} : \text{1-リプシッツ} \}$ により，オブザーバブル直径は以下のように表すことができる．

$$\mathrm{ObsDiam}(X;-\kappa) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X;1)} \mathrm{diam}(\mu; 1-\kappa).$$

よって，$\mathcal{M}(X;1)$ のリプシッツ順序に関する最大元が分かれば，X の κ-オブザーバブル直径はその最大元のパーシャル直径として正確に求められる．

2 n 次元球面の 1-メジャーメントの最大元

半径 1 の n 次元球面 $S^n(1)$ にリーマン距離 $d_{S^n(1)}$ とリーマン体積測度を正規化した測度 $\mu_{S^n(1)}$ を備えた mm-空間 $(S^n(1), d_{S^n(1)}, \mu_{S^n(1)})$ を考え，これを単に $S^n(1)$ とかく．$S^n(1)$ の 1-メジャーメントの最大元について考察した結果，以下の定理が得られた．

定理 2.1. n 次元球面の一点からの距離関数による押し出し測度は $\mathcal{M}(S^n(1);1)$ の全ての元を支配する．すなわち，一点からの距離関数による押し出し測度は $\mathcal{M}(S^n(1);1)$ の最大元である．

この定理を示す際に以下の定理を用いた．

定理 2.2 (Lévy の等周不等式). 任意の閉部分集合 $\Omega \subset S^n(1)$ に対して，$\mu_{S^n(1)}(B_\Omega) = \mu_{S^n(1)}(\Omega)$ をみたす距離球 $B_\Omega \subset S^n(1)$ をとる．このとき任意の $r > 0$ に対して，

$$\mu_{S^n(1)}(U_r(\Omega)) \geq \mu_{S^n(1)}(U_r(B_\Omega))$$

が成り立つ．

$S^n(1)$ のオブザーバブル直径は Gromov により既に正確に求められていたが，定理 2.1 の系としても $S^n(1)$ のオブザーバブル直径を正確に求めることができる．

3　n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の 1-メジャーメントの最大元

n 次元実射影空間に Fubini-Study 計量を与え，リーマン距離 $d_{\mathbb{R}P^n}$ ととリーマン体積測度を正規化した測度 $\mu_{\mathbb{R}P^n}$ を備えた mm-空間 $(\mathbb{R}P^n, d_{\mathbb{R}P^n}, \mu_{\mathbb{R}P^n})$ を考え，これを単に $\mathbb{R}P^n$ とかく．実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の 1-メジャーメント $\mathcal{M}(\mathbb{R}P^n; 1)$ の最大元について考察した結果，以下の定理が成り立つことが分かった．

定理 3.1. $n \geq 2$ とする．n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ において $\mathcal{M}(\mathbb{R}P^n; 1)$ の元で一点からの距離関数による押し出し測度と比較不可能なものが存在する．

これについては，リプシッツ順序に関して単調増加な (κ, r)-劣位容量という量を導入することで示した．この不変量は計算が容易であり，リプシッツ順序がいえないことを示す際に非常に有用である．

定義 3.2 ((κ, r)-劣位集合, (κ, r)-劣位容量)**.** (X, d, μ) を mm-空間で，$\kappa \in [0,1], r \in [0, \infty)$ とする．このとき，X の (κ, r)-**劣位集合**と (κ, r)-**劣位容量**をそれぞれ以下のように定義する．

$$\mathrm{LowSet}(X; \kappa, r) := \{x \in \operatorname{supp}\mu \mid \mu(U_r(x)) \leq \kappa\},$$

$$\mathrm{MeasCap}_\varepsilon(X; \kappa, r) := \mathrm{Cap}_\varepsilon(\mathrm{LowSet}(X; \kappa, r)).$$

ここで，$U_r(x)$ は x 中心で半径 r の開球であり，ε-容量 Cap_ε は

$$\mathrm{Cap}_\varepsilon(X) := \sup\{\, \#N \mid N \text{ は } \varepsilon\text{-離散ネット} \,\}$$

で定義される．部分集合 $N \subset X$ が ε-離散ネットであるとは，任意の異なる二点 $x, y \in N$ に対して $d_X(x, y) \geq \varepsilon$ が成り立つことである．

4　3 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ の κ-オブザーバブル直径

n 次元実射影空間において 1-メジャーメントの最大元を求めることは難しい問題であるので，$n = 3$ の場合の考察を述べる．n 次元球面の κ-オブザーバブル直径を求める際に Lévy の等周不等式が用いられているように，κ-オブザーバブル直径と Lévy の等周不等式は関係が深い．n 次元球面においては等周不等式の等号を満たす部分集合の境界は距離球面であるが，[3] によると 3 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ においては，等周不等式の等号を満たす部分集合の境界は距離球面と極大な測地線を中心としたトーラスの二種類ある．一方，一点からの距離関数と極大な測地線からの距離関数の等位集合はそれぞれ距離球面とトーラスになる．κ-オブザーバブル直径は，$\mathcal{M}(\mathbb{R}P^3; 1)$ の元のパーシャル直径で下限が評価できる．今回，極大な測地線からの距離関数による押し出し測度と一点からの距離関数による押し出し測度のパーシャル直径を比較した結果以下の定理が得られた．1 点 $\bar{x} \in \mathbb{R}P^3$ を固定し，$f(x) := d_{\mathbb{R}P^3}(x, \bar{x})\ (x \in \mathbb{R}P^3)$ を一点からの距離関数とする．部分集合 $A \subset \mathbb{R}P^3$ を極大な測地線とし，$g(x) := d_{\mathbb{R}P^3}(x, A)\ (x \in \mathbb{R}P^3)$ を A からの距離関数とする．

定理 4.1. 任意の $\kappa \in [0, 1]$ において

$$\mathrm{diam}(f_* \mu_{\mathbb{R}P^3}; 1 - \kappa) \leq \mathrm{diam}(g_* \mu_{\mathbb{R}P^3}; 1 - \kappa)$$

が成り立つ．等号成立は $\kappa=0,1$ のときのみである．

この定理から $\mathbb{R}P^3$ のオブザーバブル直径の下限の評価をする際には一点からの距離関数による押し出し測度のパーシャル直径よりも極大な測地線からの距離関数による押し出し測度のパーシャル直径の方がよりよい評価を与えることが分かる．

さらに，先ほど導入した不変量である (κ,r)-劣位容量を用いることで以下が得られた．

定理 4.2. 二つの mm-空間 $(\mathbb{R}, f_*\mu_{\mathbb{R}P^3})$, $(\mathbb{R}, g_*\mu_{\mathbb{R}P^3})$ はリプシッツ順序において比較不可能である．

一点からの距離関数による押し出し測度よりもパーシャル直径が大きくなるものは 3 次元実射影空間においては $g_*\mu_{\mathbb{R}P^3}$ があったが，これよりもパーシャル直径が大きくなるものは存在しないと予想している．また，2 次元実射影空間においては一点からの距離関数による押し出し測度よりもパーシャル直径が大きくなるものは存在しないと予想している．また，$n\geq 2$ において $\mathcal{M}(\mathbb{R}P^n;1)$ の最大元は存在しないと予想している．

参考文献

[1] B. Bollobás, *Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability.

[2] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Based on the 1981 French original; With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; Translated from the French by Sean Michael Bates.

[3] A. Ros, *The isoperimetric problem*, Global theory of minimal surfaces, Clay Math. Proc., vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 175–209.

[4] T. Shioya, *Metric measure geometry*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures. MR3445278