空間の収束におけるエネルギー汎関数の収束と曲率次元条件の安定性

数川 大輔 Daisuke Kazukawa
(東北大学大学院理学研究科数学専攻) *

1 Introduction

測度距離空間の幾何学は, リーマン多様体の収束理論に由来し, その一般化として研究されてきた. 深谷は [7] でリーマン多様体の次元を保たない変形 (崩壊) の下でのラプラシアンの固有値の振る舞いを研究するため, リーマン多様体の一般化である測度距離空間のクラスに測度付き Gromov-Hausdorff 位相 (以下, mGH 位相とかく) を定義した. 深谷は, 断面曲率が上下に一様有界で, 直径が一様有界であるコンパクトリーマン多様体の列が mGH 収束するとき, 極限空間にラプラシアンに対応する自然な作用素が定義され, 固有値や固有関数が収束することを示した. 測度距離空間の幾何学が導入された背景として, リーマン多様体の mGH 収束を考えたとき, 極限空間がリーマン多様体の構造を持たない場合を含む研究がなされたということが挙げられる. また [7] で深谷は断面曲率の有界性を Ricci 曲率が下に一様有界であるという条件に弱めても同様のことが成り立つと予想した. この予想は, Cheeger-Colding の [4–6] の一連の研究により, 肯定的に解決された.

また, 深谷の研究に続き, mGH 収束するリーマン多様体の列に対するエネルギー汎関数の収束の研究がある. 加須栄-久村は [11, 12] でコンパクトリーマン多様体のクラスにスペクトル距離を導入し, mGH 収束するリーマン多様体の熱核の収束を研究した. 桑江-塩谷は, mGH 収束する測度距離空間上の Hilbert 空間の収束理論を [13, 14] で研究した. その際, 桑江-塩谷は, 変分理論に由来する Γ 収束や Mosco 収束とよばれる収束を用いて, エネルギー汎関数の収束理論を整備した.

一方で, 曲率の条件を含む収束理論の観点から, 測度距離空間上に曲率の概念を一般化する研究がなされた. 断面曲率を一般化した曲率を持つ空間として, Alexandrov 空間が収束理論以前から知られていた. Lott-Villani と Sturm はそれぞれ独立に [15], [18] によって曲率次元条件と呼ばれる測度距離空間上の Ricci 曲率の下限条件に対応する条件を定義した. 曲率次元条件を満たす空間を CD 空間という. その後, Ambrosio-Gigli-Savaré によって CD 空間よりも強い条件を満たす RCD 空間が [3] で定義された. RCD 空間はリーマン多様体のような良いエネルギー解析を行える測度距離空間として広く研究されている.

測度距離空間の研究の中に, 空間列の収束に対する条件の安定性の研究がある. 共通の性質を満たす測度距離空間の列 $\{X_n\}$ がある測度距離空間 Y になんらかの意味で収束するとき, Y も同様の性質を満たすかという問題の研究は, 収束理論において極限空間を調

*daisuke.kazukawa.s6@dc.tohoku.ac.jp

べるための興味深い研究の一つである. 測度距離空間列の収束概念の一つとして, Gromov は [10] で球面の測度集中現象などを捉えた集中と呼ばれる収束を定義した. 集中は mGH 位相よりも弱い位相を与えることが知られている. 集中する測度距離空間列において曲率次元条件の安定性が [8] によって知られている.

今回, 集中する測度距離空間列において, RCD 空間であるという条件の安定性について研究し, リーマン多様体における Dirichlet エネルギー汎関数にあたる L^2 空間上の Cheeger エネルギー汎関数の Mosco 収束を調べることで, ある条件を満たす空間列に対して RCD 空間の安定性に関する結果を得た.

この研究の先行研究としては, 加須栄-久村 [11,12], 桑江-塩谷 [13,14] による mGH 収束するリーマン多様体上のエネルギー汎関数の収束や Gigli-Mondino-Savaré による [9] での点付き測度付き Gromov 収束という収束における測度距離空間上の Cheeger エネルギー汎関数の収束と RCD 空間の安定性の研究が挙げられる. 先行研究における空間列の収束は, 空間列と極限空間をある共通の空間に等長に埋め込んで, 各空間上の L^2 空間を共通の空間上の L^2 空間と考えることができる. しかし, 集中する空間列には先行研究と同様の共通の空間は存在しない場合がある. そこで新たに集中する空間列に合う L^2 関数列の収束を与え, 先行研究にない新しい枠組みでの研究を行った.

2　測度距離空間の幾何学

2.1　曲率次元条件

測度距離空間 (X, d, m) とは, 完備可分距離空間 (X, d) とその上の Borel 確率測度 m の 3 つ組である. $P(X)$ を X 上の Borel 確率測度全体の集合とし, 次の部分集合を考える.

$$P_2(X) := \left\{ \mu \in P(X) \;\middle|\; \text{ある点 } \overline{x} \in X \text{ が存在して}, \int_X d(x, \overline{x})^2 \, d\mu(x) < +\infty \right\}. \qquad (1)$$

$P_2(X)$ 上に最適輸送理論においてよく知られる **L^2-Wasserstein 距離**を

$$W_2(\mu_1, \mu_2) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu_1, \mu_2)} \left(\int_{X \times X} d(x, x')^2 \, d\pi(x, x') \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\mu_1, \mu_2 \in P_2(X)) \qquad (2)$$

により定める. ただし, $\Pi(\mu_1, \mu_2) := \{\pi \in P(X \times X) \mid \mathrm{pr}_{i*}\pi = \mu_i \ (i = 1, 2)\}$ であり, $\mathrm{pr}_i : X \times X \to X$ は自然な射影である. また, $\mathrm{pr}_{i*}\pi$ は, 一般に $p : X \to Y$ と $\mu \in P(X)$ に対して $p_*\mu(\cdot) := \mu(p^{-1}(\cdot))$ により定まる**押し出し測度** $p_*\mu \in P(Y)$ である. $(P_2(X), W_2)$ は完備可分距離空間になる. これを **L^2-Wasserstein 空間**という.

また, **相対エントロピー汎関数** $\mathrm{Ent}_m : P(X) \to [0, +\infty]$ を

$$\mathrm{Ent}_m(\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int_X \rho(x) \log \rho(x) \, dm(x) \, (\leq +\infty) & (\mu \text{が } m \text{ に関して絶対連続のとき}) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases} \qquad (3)$$

により定める. ただし, ρ は m に関する μ の密度関数である. $D(\mathrm{Ent}_m) := \{\mu \in P(X) \mid \mathrm{Ent}_m(\mu) < +\infty\}$ とする.

測度距離空間における Ricci 曲率の下限条件に対応する曲率次元条件が [15], [18] で次のように定義された.

定義 2.1. 測度距離空間 (X,d,m) が $K\in\mathbb{R}$ に対して**曲率次元条件** $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たすとは, 任意の 2 つの測度 $\mu_0,\mu_1\in P_2(X)\cap D(\mathrm{Ent}_m)$ に対して, 次を満たす μ_0 と μ_1 を結ぶ W_2 測地線 $\mu:[0,1]\ni t\mapsto\mu_t\in P_2(X)$ が存在するときをいう. 任意の $t\in[0,1]$ に対し,

$$\mathrm{Ent}_m(\mu_t)\le(1-t)\mathrm{Ent}_m(\mu_0)+t\mathrm{Ent}_m(\mu_1)-\frac{K}{2}t(1-t)W_2(\mu_0,\mu_1)^2 \tag{4}$$

が成り立つ.

次の定理は, 実際に曲率次元条件がリーマン多様体における Ricci 曲率の下限条件として特徴づけられることを意味している.

定理 2.2 (cf. [16])**.** $K\in\mathbb{R}$ とする. 完備リーマン多様体 M に対して, M が $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たすことと M の Ricci 曲率の下限が K 以上であることは同値である.

2.2 Cheeger エネルギー汎関数

(X,d,m) を測度距離空間とする. $\mathcal{L}ip(X)$ を X 上の Lipschitz 関数全体とする.
$f\in\mathcal{L}ip(X)$ に対して, **局所 Lipschitz 定数** $|\nabla f|:X\to[0,+\infty)$ を

$$|\nabla f|(x):=\limsup_{x'\to x}\frac{|f(x)-f(x')|}{d(x,x')} \tag{5}$$

で定める. **Cheeger エネルギー汎関数**とよばれる $L^2(X,m)$ 上の汎関数 $\mathrm{Ch}:L^2(X,m)\to[0,+\infty]$ を次で定める.

$$\mathrm{Ch}(f):=\frac{1}{2}\inf\left\{\liminf_{i\to\infty}\int_X|\nabla f_i|^2\,dm\;\middle|\; f_i\in L^2(X,m)\cap\mathcal{L}ip(X),\ f_i\xrightarrow{L^2}f\right\}. \tag{6}$$

この定義において, $L^2(X,m)$ の中で $L^2(X,m)\cap\mathcal{L}ip(X)$ が稠密であることから, f の近似列 f_i の存在が保証される. $W^{1,2}(X,d,m):=\{f\in L^2(X,m)\mid\mathrm{Ch}(f)<+\infty\}$ とする.

Ambrosio-Gigli-Savaré は [3] で次の条件を定義し, その条件を満たす空間の Cheeger エネルギー汎関数の熱流や対応するラプラシアンの固有値などを研究した.

定義 2.3. 測度距離空間 (X,d,m) が $K\in\mathbb{R}$ に対して**リーマン的曲率次元条件** $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たすとは, X が $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たし, かつ, Cheeger エネルギー汎関数 Ch が 2 次形式となる, すなわち, 任意の $f,g\in L^2(X,m)$ に対して,

$$\mathrm{Ch}(f+g)+\mathrm{Ch}(f-g)=2\mathrm{Ch}(f)+2\mathrm{Ch}(g) \tag{7}$$

を満たすときをいう.

3 測度距離空間列の集中

(X,d,m) を測度距離空間とする. X 上の有界な連続関数全体の集合を $C_b(X)$ とする.

確率測度の列 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P(X)$ が確率測度 $\mu \in P(X)$ に**弱収束する**とは, 任意の $f \in C_b(X)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\, d\mu_n(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x) \tag{8}$$

が成り立つときをいう. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が μ に弱収束するとき, $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ と表す.

また, 2 つの Borel 可測関数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ に対し, **Ky Fan 距離** $d_{\mathrm{KF}}^m(f,g)$ を次を満たすような実数 $\varepsilon > 0$ の下限として定める.

$$m(\{x \in X \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon. \tag{9}$$

Ky Fan 距離 d_{KF}^m は Borel 可測関数全体の集合上の距離であり, 関数列の測度収束の位相を与える. $\mathcal{L}ip_1(X)$ を X 上の 1-Lipschitz 関数全体の集合とする. ただし, **1-Lipschitz 関数**とは, Lipschitz 定数が 1 以下の関数である.

測度距離空間列の集中は, 測度の弱収束と 1-Lipschitz 関数全体の集合の収束により特徴づけられる空間列の収束である. 空間列の集中現象は Gromov によって [10] で研究された.

定義 3.1. 測度距離空間の列 $\{(X_n, d_n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が測度距離空間 (Y, d, m) に**集中する**とは, ある Borel 可測写像の列 $p_n : X_n \to Y$ で

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathrm{H}}(\mathcal{L}ip_1(X_n), {p_n}^*\mathcal{L}ip_1(Y)) = 0, \quad p_{n*}m_n \xrightarrow{w} m \tag{10}$$

を満たすものが存在するときをいう. ただし, d_{H} は Ky Fan 距離 $d_{\mathrm{KF}}^{m_n}$ に関する Hausdorff 距離であり, また, ${p_n}^*\mathcal{L}ip_1(Y) := \{f \circ p_n \mid f \in \mathcal{L}ip_1(Y)\}$ である.

注意 3.2. Gromov は測度距離空間 (の同型類) 全体の集合にオブザーバブル距離と呼ばれる距離を定義し, その距離による収束を集中と呼び, 研究した ([10], [17] 参照). 上の定義は Gromov によって研究された空間列の集中の同値条件の一つである.

集中する測度距離空間列の重要な例として Lévy 族がある. 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Lévy 族**であるとは, X_n が 1 点からなる測度距離空間に集中するときをいう.

例 3.3. 半径 1 の n 次元球面 $S^n(1)$ を自然なリーマン距離と正規化されたリーマン体積測度をもつ測度距離空間とする. このとき, 空間列 $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Lévy 族である. これは Lévy による古典的な球面の測度集中現象を捉えている.

集中の定義の p_n は次の意味でほぼ 1-Lipschitz 写像であることが知られている. 測度距離空間 $(X, d_X, m_X), (Y, d_Y, m_Y)$ とする. 写像 $p : X \to Y$ が**誤差 ε を持つ 1-Lipschitz 写像**であるとは, ある Borel 集合 $\tilde{X} \subset X$ が存在して, 次の (1), (2) を満たすときをいう.

(1) $m_X(\tilde{X}) \geq 1 - \varepsilon$ が成り立つ.

(2) $x, x' \in \tilde{X}$ に対して, $d_Y(p(x), p(x')) \leq d_X(x, x') + \varepsilon$ が成り立つ.

集中の定義の p_n は 0 に収束する誤差を持つ 1-Lipschitz 写像である.

4　L^2 関数列の収束とエネルギー汎関数の収束

測度距離空間の列 $\{(X_n, d_n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ と測度距離空間 (Y, d, m) に対して, Borel 可測写像 $p_n : X_n \to Y$ で $p_{n*}m_n \xrightarrow{w} m$ を満たすものが存在すると仮定する. このとき, "空間をわたる" L^2 関数列の収束を次で定める.

定義 4.1. $f_n \in L^2(X_n, m_n), f \in L^2(Y, m)$ とする. f_n が f に L^2 **弱収束する**とは, 任意の $\varphi \in C_b(Y)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} \varphi(p_n(x)) f_n(x)\, dm_n(x) = \int_Y \varphi(y) f(y)\, dm(y) \tag{11}$$

を満たし, かつ,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_n} f_n(x)^2\, dm_n(x) < +\infty \tag{12}$$

を満たすときをいう. また, f_n が f に L^2 **強収束する**とは, f_n が f に L^2 弱収束し, かつ,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f_n(x)^2\, dm_n(x) = \int_Y f(y)^2\, dm(y) \tag{13}$$

を満たすときをいう. f_n が f に L^2 弱収束するとき, $f_n \xrightarrow{L^2\text{-}w} f$ と表し, L^2 強収束するとき, $f_n \xrightarrow{L^2\text{-}s} f$ と表す.

このような L^2 関数列の収束が存在するとき, [14] により, L^2 空間上のエネルギー汎関数の列に対し, 次の Mosco 収束と呼ばれる収束が定義できる.

定義 4.2. $E_n : L^2(X_n, m_n) \to [0, +\infty], E : L^2(Y, m) \to [0, +\infty]$ とする. 次の 2 つの条件を満たすとき, E_n が E に **Mosco 収束する**という.

(1) 任意の $f \in L^2(Y, m)$ に対して, ある $f_n \in L^2(X_n, m_n)$ が存在して, $f_n \xrightarrow{L^2\text{-}s} f$ を満たし, かつ,

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f_n) = E(f) \tag{14}$$

を満たす.

(2) 任意の $f_n \in L^2(X_n, m_n), f \in L^2(Y, m)$ に対して, $f_n \xrightarrow{L^2\text{-}w} f$ が成り立つならば,

$$\liminf_{n\to\infty} E_n(f_n) \geq E(f) \tag{15}$$

が成り立つ.

5　主結果

5.1　ファイバー制御条件

主結果を述べる準備をする. 次の定理がよく知られている.

定理 5.1 (測度分解定理)**.** $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を完備可分距離空間とし, $p : X \to Y$ を Borel 可測写像とする. このとき, 任意の $\mu \in P(X)$ に対して, 次の (1) - (3) を満たすような X 上の確率測度の族 $\{\mu_y\}_{y \in Y} \subset P(X)$ が存在する.

(1) 任意の Borel 部分集合 $A \subset Y$ に対して, $Y \ni y \mapsto \mu_y(A) \in [0, 1]$ が Borel 可測関数である.

(2) $p_*\mu$-a.e. $y \in Y$ に対し, $\mu_y(X \setminus p^{-1}(y)) = 0$ が成り立つ.

(3) 任意の Borel 可測関数 $f : X \to [0, +\infty)$ に対し,

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_Y \int_{p^{-1}(y)} f(x)\, d\mu_y(x) d(p_*\mu)(y) \tag{16}$$

が成り立つ.

さらに, $\{\mu_y\}_{y \in Y}$ は $p_*\mu$-a.e. に関して一意である. $\{\mu_y\}_{y \in Y}$ を p による μ の**分解**という.

$(X, d_X, m_X), (Y, d_Y, m_Y)$ を測度距離空間とし, $p : X \to Y$ を 1-Lipschitz 写像とする. このとき, 次のファイバー制御条件を導入する.

定義 5.2. $p : X \to Y$ が**ファイバー制御条件** FC を満たすとは, ある Borel 集合 $\tilde{Y} \subset Y$ が存在して, $p_*m_X(\tilde{Y}) = 1$ を満たし, かつ, 任意の 2 点 $y, y' \in \tilde{Y}$ に対し, ある Borel 可測写像 $\psi_{yy'} : p^{-1}(y) \to p^{-1}(y')$ で次を満たすものが存在するときをいう.

(1) ${\psi_{yy'}}_*\mu_y = \mu_{y'}$ が成り立つ.

(2) 任意の点 $x \in p^{-1}(y)$ に対し, $d_X(x, \psi_{yy'}(x)) = d_Y(y, y')$ が成り立つ.

ただし, $\{\mu_y\}_{y \in Y}$ は m_X の p による分解である.

5.2 主結果

ファイバー制御条件を満たすような列 $p_n : X_n \to Y$ に対して次のような結果を得た.

定理 5.3. $\{(X_n, d_n, m_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を測度距離空間の列, (Y, d, m) を測度距離空間とし, $p_n : X_n \to Y$ を 1-Lipschitz 写像とする. さらに, 次を仮定する.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $p_{n*}m_n = m$ が成り立つ.

(2) 各 p_n は FC を満たす.

このとき, X_n の Cheeger エネルギー汎関数 Ch_n は Y の Cheeger エネルギー汎関数 Ch に Mosco 収束する.

さらに, 測度距離空間の列が $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たすときには次が得られる.

定理 5.4. $K \in \mathbb{R}$ とする. $\{(X_n, d_n, m_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たす測度距離空間の列, (Y, d, m) を測度距離空間とし, $p_n : X_n \to Y$ を 1-Lipschitz 写像とする. さらに, 次を仮定する.

(1) $p_{n*}m_n \xrightarrow{w} m$ が成り立つ.

(2) 各 p_n は FC を満たす.

(3) 各 n に対して, m_n の p_n による分解 $\{\mu_y^n\}_{y\in Y}$ が $\{\mu_y^n\}_{y\in Y} \subset P_2(X_n)$ となる.

このとき, X_n の Cheeger エネルギー汎関数 Ch_n は Y の Cheeger エネルギー汎関数 Ch に Mosco 収束する.

m_n の分解が $P_2(X_n)$ に属すという条件は X_n が有限な直径を持つときは常に満たされる条件である. また, 次が成り立つことも得られた. 次の定理は定理 5.4 を証明する際にも用いている.

定理 5.5. (X, d_X, m_X) を $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす測度距離空間, (Y, d_Y, m_Y) を測度距離空間とし, $p : X \to Y$ を 1-Lipschitz 写像とする. さらに, 次を仮定する.

(1) $p_* m_X = m_Y$ が成り立つ.

(2) p は FC を満たす.

(3) m_X の分解 $\{\mu_y\}_{y\in Y}$ が $\{\mu_y\}_{y\in Y} \subset P_2(X)$ となる.

このとき, Y も $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす.

定理 5.4, 5.5 から, $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ の安定性に関する次のような結果が得られた.

定理 5.6. $\{(X_n, d_n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす測度距離空間の列, (Y, d, m) を測度距離空間とし, $p_n : X_n \to Y$ を 1-Lipschitz 写像とする. さらに, 定理 5.4 の仮定 (1) - (3) を満たすとする. このとき, Y も $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす.

5.3 主結果の例と応用

例 5.7. $\{(X_n, d_n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を Lévy 族とし, (Y, d, m) を測度距離空間とする. このとき, X_n と Y の l_p 直積空間 $X_n \times_{l_p} Y$ は Y に集中することが知られている. ただし, $1 \le p \le +\infty$ であり, l_p 直積空間 $X_n \times_{l_p} Y$ とは, 直積集合 $X_n \times Y$ に, l_p 距離 d_{l_p} と直積測度 $m_n \otimes m$ を与えた測度距離空間である. d_{l_p} は任意の $(x,y),(x',y') \in X_n \times Y$ に対して次で定義する.

$$d_{l_p}((x,y),(x',y')) := \begin{cases} (d_n(x,x')^p + d(y,y')^p)^{\frac{1}{p}} & (1 \le p < +\infty \text{ のとき}) \\ \max\{d_n(x,x'), d(y,y')\} & (p = +\infty \text{ のとき}) \end{cases}. \tag{17}$$

この集中は $p_n : X_n \times_{l_p} Y \to Y$ を自然な射影としてとることで得られるが, p_n は FC と $p_{n*}(m_n \otimes m) = m$ を満たす 1-Lipschitz 写像である. したがって, Cheeger エネルギーは Mosco 収束し, さらに, もし $X_n \times_{l_p} Y$ が $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たすならば, Y も $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす. 集中する測度距離空間の列の非自明な例に対して $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ の安定性が示された結果はこれまで知られていなかった.

さらに, 前述の主結果について, ファイバー制御条件という強い構造条件を課している一方で, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Y に収束している必要はない. 主結果の重要な応用として, 群作用をもつ測度距離空間の軌道空間の性質に関する次の結果を得た.

定理 5.8. (X, d, m) を測度距離空間とし, G をコンパクト位相群とする. さらに, X は次の (1) - (3) を満たすような G の連続な作用を持つとする.

(1) 任意の $x, y \in X$ と任意の $g \in G$ に対して, $d(gx, gy) = d(x, y)$ が成り立つ.

(2) m-a.e. $x \in X$ に対して, x の安定部分群 G_x が単位元のみから成る.

(3) 任意の $g \in G$ に対して, $g_* m = m$ が成り立つ.

軌道空間 X/G への射影を $\pi : X \to X/G$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) (X, d, m) が $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たすならば, $(X/G, d_{X/G}, \pi_* m)$ も $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たす.

(2) (X, d, m) が $\mathrm{RCD}(K, \infty)$ を満たすならば, $(X/G, d_{X/G}, \pi_* m)$ も $\mathrm{RCD}(K, \infty)$ を満たす.

ただし, $d_{X/G}$ は作用が等長で任意の軌道 Gx が閉集合のとき,

$$d_{X/G}(Gx, Gx') = \inf_{g, g' \in G} d(gx, g'x') \tag{18}$$

によって定まる X/G 上の距離である.

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[2] ———, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Invent. Math. **195** (2014), no. 2, 289–391.

[3] ———, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 7, 1405–1490.

[4] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 3, 406–480.

[5] ———, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 1, 13–35.

[6] ———, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 1, 37–74.

[7] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator*, Invent. Math. **87** (1987), no. 3, 517–547.

[8] K. Funano and T. Shioya, *Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013), no. 3, 888–936, DOI 10.1007/s00039-013-0215-x. MR3061776

[9] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 5, 1071–1129.

[10] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Based on the 1981 French original; With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; Translated from the French by Sean Michael Bates.

[11] A. Kasue and H. Kumura, *Spectral convergence of Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **46** (1994), no. 2, 147–179.

[12] ———, *Spectral convergence of Riemannian manifolds. II*, Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), no. 1, 71–120.

[13] K. Kuwae and T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), no. 4, 599–673.

[14] ———, *Variational convergence over metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 1, 35–75 (electronic).

[15] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.

[16] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), no. 7, 923–940.

[17] T. Shioya, *Metric measure geometry*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures.

[18] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.