分数冪Navier-Stokes 方程式の解の延長と渦度の方向ベクトルの関係について

中井 拳吾 (東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻修士課程)*

1. 導入

1.1. 背景

3次元Navier-Stokes 方程式

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p + \nu\Delta v && \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty)\\
&\operatorname{div} v = 0 && \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty)\\
&v(x,0) = v_0(x) && \text{in } \mathbb{R}^3,
\end{aligned}
$$

について, 滑らかな時間大域解が存在するか否かという問題は未解決ミレニアム問題の一つである. また, Navier-Stokes 方程式は乱流を含めた粘性流体の運動をうまく記述できる. 実はこの乱流こそがNavier-Stokes 方程式の解の爆発問題のカギを握っているのではないかと考える研究者もいる [12]. そこで, 乱流に注目してこの解の爆発問題を考察することを考えた.

乱流では, エネルギーが遷移する様子に特徴がある. その様子をエネルギーの減衰則 [9] と呼び乱流の重要な性質の一つとして考えられている. また, Navier-Stokes 方程式の直接数値計算によって得られた発達した乱流でもこのエネルギーの減衰則が確かめられている. 近年では, 粘性項のラプラシアンの冪数を調整し高周波をダンピングさせるように変化させた方程式 (この方程式をRNSと呼ぶ) の直接数値計算によって得られた発達した乱流でもこの減衰則を満たすようにできることが示されている [15]. つまり, 乱流研究においてRNSは元のNavier-Stokes方程式と同様に重要である. そこで, RNS の単純な拡張として次の連立方程式を考えることとした:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p - \nu(-\Delta)^{\alpha/2} v && \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty) && (1)\\
&\operatorname{div} v = 0 && \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty) && (2)\\
&v(x,0) = v_0(x) && \text{in } \mathbb{R}^3. && (3)
\end{aligned}
$$

ただし, $v = v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ を速度ベクトル, $p = p(x,t)$ を圧力, $\nu > 0$ を動粘性係数とする. また, $v_0(x)$ は $\operatorname{div} v_0 = 0$ を満たす初期速度ベクトルする. ここで, $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}^3$ 上の2乗可積分関数 L^2 から L^2 へのフーリエ変換として, 微分作用素 $(-\Delta)^{\alpha/2}$ は次のように定める.

定義. [[13]-Chapter 5] $0 < \alpha < 3$ を満たす α と $f \in H^\alpha$ に対して, 微分作用素 $(-\Delta)^{\alpha/2}$ を

$$\mathcal{F}\left[(-\Delta)^{\alpha/2} f(x)\right](\xi) = |\xi|^\alpha \mathcal{F}_{[f]}(\xi),$$

として定義する.

キーワード : Navier-Stokes, fractional powers of the Laplacian, blow-up, vorticity direction, turbulence
* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1
e-mail: nakai.k.ae@m.titech.ac.jp

この連立偏微分方程式 (1)∼(3) を $(\mathrm{NS})_\alpha$ と書く. $(\mathrm{NS})_\alpha$ は J. L. Lions によって初めて研究され, $\alpha \geq 5/2$ での時間大域的な滑らかな一意解の存在を示されている [11]. さらに, O. A. Ladyzhenskaya が洗練した証明を与えた. 最近では, $\alpha = 5/2$ よりも指数を若干弱めた場合での滑らかな時間大域解の存在などの研究がされている [14]. また, $\alpha = 2$ の場合, つまり, Navier-Stokes 方程式の場合については, J. Leray[10], E. Hopf[8] らによって弱解の存在が示されてる. しかし, その弱解の正則性や一意性の証明はいまだに解決されていない. この, "大きな初期値 v_0 に対して, 滑らかな時間大域解が存在するか?" という問題はクレイ研究所が提示したミレニアム問題の一つである. 一方で, 主定理で考察する $0 < \alpha < 2$ のようにラプラシアンの冪が 1 以下の場合では, 弱解の存在すら示されていない.

Navier-Stokes 方程式の解の滑らかさを有限時間で失うか否かという問題を考えるうえで渦度ベクトルは速度ベクトルよりも重要だと示唆されている [5, 7]. ただし, 渦度 ω を速度 v を用いて次で定義する:

$$\omega = \mathrm{rot}\, v.$$

重要な解の延長条件として次の命題がある.

命題 1.1 ([1])**.** *ある $M_0, T^\star$ が存在し, 任意の $T(< T^\star)$ に対して $v(x,t) \in E_s(T)$ となる Euler 方程式の解の渦度 $\omega(x,t) := \mathrm{rot}\, v(x,t)$ が次を満たすとする.*

$$\int_0^T \|\omega(x,t)\|_\infty dt < \infty.$$

このとき, $v(x,t) \in E_s(T^\star)$ を満たす.

ただし, 関数クラス $E_s(T)$ を次のように定義した:

$$E_s(T) := C([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}) \quad (s \geq 3).$$

J. T. Beale-T. Kato-A. Majda らは Euler 方程式について示したが, 全く同じ証明方法で, $(\mathrm{NS})_\alpha$ についても証明することができる. さらに, P. Constantin-C. Fefferman[6] では Navier-Storkes 方程式の解の爆発と渦度の "方向ベクトル" との関係を初めて明らかにした. これを, H. Beirão da Veiga, L. Berselli [3, 2] らが次のように改良した.

命題 1.2 ([3])**.** *v を $v_0 \in H^1_\sigma$ に対する $(\mathrm{NS})_2$ の弱解とする. また, $\beta \in [1/2, 1]$ とする. $K < |\omega(x,t)|, |\omega(x+h,t)|$ を満たす $t \in [0,T)$, $x, x+h \in \mathbb{R}^3$ に対して*

$$g(t,x) \geq \frac{\sqrt{1 - (\xi(x,t) \cdot \xi(x+h,t))^2}}{|h|^\beta} \, (=: \eta_\beta(x,h,t)) \, ,$$

となる $K > 0$ と $g \in L^a(0,T; L^b)$

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \beta - \frac{1}{2} \quad with \quad a \in \left[\frac{4}{2\beta - 1}, \infty\right]$$

が存在するとする. この時 $(\mathrm{NS})_2$ の解は, 時刻 $[0,T]$ で爆発しない.

命題 1.3 ([2])**.** v を $v_0 \in H^1_\sigma$ に対する $(\mathrm{NS})_2$ の弱解とする．また，$\beta \in [0, 1/2]$ とする．$K < |\omega(x,t)|, |\omega(x+h,t)|$ を満たす $t \in [0,T)$, $x, x+h \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\frac{1}{\rho} \geq \eta_\beta(x,h,t),$$

となる $K > 0$ と $\rho > 0$ が存在するとする．さらに

$$\omega \in L^2(0,T;L^r) \ \ \mathrm{r} = \frac{3}{\beta+1}$$

とする．この時 $(\mathrm{NS})_2$ の解は，時刻 $[0,T]$ で爆発しない．

$v_0 \in W^{1,p}_\sigma \cap H^k (k \geq 3)$ の初期値とし $(\mathrm{NS})_\alpha$ に対しても，D. Chae[4] は次のようなことを示した．ただし，p は 2^m $(m \geq 1)$ の形で書け，$\max\{\frac{6}{\alpha} - 2, \frac{3}{\alpha}\} \leq p$ を満たすとする．

命題 1.4 ([4])**.** ある $M_0, T^\star$ が存在し，任意の $T (< T^\star)$ に対して $v(x,t) \in E_s(T)$ となる $(\mathrm{NS})_\alpha$ の解の渦度 $\omega(x,t) := \mathrm{rot}\, v(x,t)$ が次を満たすとする．さらに $\omega(x,t) \neq 0$ に対して，$\xi(x,t) = \omega(x,t)/|\omega(x,t)|$ と定義する．このもとで，$\beta \in (0,1)$, $h \in (\frac{3}{3-\beta}, \infty]$, $p_1 \in (1,\infty]$, $r \in (1, \frac{3}{\beta})$ は $\frac{\beta}{3} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r} < \frac{\alpha+\beta}{3}$ と $\frac{1}{r} + \frac{1}{h} < 1 + \frac{\beta}{3}$, $r_1, q \in [1, \infty]$ を満たす実数として，

$$\xi(x,t) \in L^{r_1}(0,T;\dot{\mathcal{F}}^\beta_{p_1,h}) \ \ \textit{and} \ \ \omega(x,t) \in L^q(0,T;L^r)$$
$$\textit{with} \quad \frac{\alpha}{r_1} + \frac{\alpha}{q} + \frac{3}{p_1} + \frac{3}{r} \leq \alpha + \beta.$$

を満たすとする．このとき，$v(x,t) \in E_s(T^\star)$ を満たす．

ここで，関数空間 $\dot{\mathcal{F}}^s_{p_1,q}$ はセミノルム

$$\dot{\mathcal{F}}^s_{p_1,q} := \begin{cases} \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{|f(x+y) - f(x)|^q}{|y|^{n+sq}} dy \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3,dx)} & if\ 1 \leq q < \infty \\ \left\| \operatorname*{ess\,sup}_{|y| \neq 0} \dfrac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^s} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3,dx)} & if\ q = \infty. \end{cases}$$

が有限であるような関数全体からなる関数空間とする．この命題は高渦度領域だけではなく低渦度領域も含めて渦度の方向ベクトル乱れが小さいと解の爆発が起こらないことを示している．そこで，命題 1.2, 命題 1.3 と同様にある程度の高渦度領域だけでの渦度の方向ベクトルの乱れの条件をもとに次の定理の証明を試みた．

1.2. 結果

初期速度場 $v_0 \in W^{1,p}_\sigma \cap H^s$ $(s \geq 3)$ として，解の延長条件について次の結果を得た．ただし，p は $\max\{\frac{6}{\alpha} - 2, \frac{3}{\alpha}, 2\} \leq p$ を満たす．

仮定 (A1)**.** 各々 $\beta \in (0,3)$, $\alpha \in (0,2]$ $b \in [1,\infty]$, $r \in (1, \frac{3}{\beta})$ とする．さらにこれらは $\frac{\beta}{3} \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{b} \leq \frac{\beta+\alpha}{3}$ を満たす．

仮定 (A2)**.**

$$\frac{\alpha}{q} + \frac{\alpha}{a} + \frac{3}{r} + \frac{3}{b} \leq \alpha + \beta,$$

を満たす任意の q , a に対して, $K > 0$ と $\omega \in L^q(0,T;L^r)$, $g \in L^a(0,T;L^b)$ が存在し, $|\omega(x,t)|, |\omega(x+h,t)| > K$ を満たす $t \in [0,T)$, $x, x+h \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\eta_\beta(x,h,t) \le g(x,t).$$

定理. ある $T^\star$ が存在し, 任意の時刻 $T(< T^\star)$ に対して $v(x,t) \in E_s(T)$ となる $(\mathrm{NS})_\alpha$ の解の渦度を $\omega(x,t) := \mathrm{rot}\, v(x,t)$ とする. さらに $\omega(x,t) \neq 0$ に対して, $\xi(x,t) = \omega(x,t)/|\omega(x,t)|$ と定義する. このもとで仮定 (A1), (A2) が満たされるとする. このとき, $v(x,t) \in E_s(T^\star)$ を満たす.

この定理は, $(\mathrm{NS})_\alpha$ の局所解 v の渦度が K 以上となる高渦度領域での渦度の方向ベクトルの乱れ η_β がある程度小さい時, 解の爆発は起こらないということを表している. また, 仮定 (A2) に注目すると渦度の方向ベクトルの乱れの程度が小さい, つまり, β が大きいときはある程度渦度の絶対値の条件は緩い場合でも解の爆発は起こらないことがわかる. さらに, $(\mathrm{NS})_\alpha$ の粘性項の指数 α が大きいときもある程度渦度の絶対値の条件は緩い場合でも解の爆発は起こらないことがわかる.

参考文献

[1] J. T. Beale, T. Kato, and A. Majda. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Comm. Math. Phys.*, 94(1):61–66, 1984.

[2] H. Beirão da Veiga. Vorticity and smoothness in viscous flows. In *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, II*, Vol. 2 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pp. 61–67. Kluwer/Plenum, New York, 2002.

[3] H. Beirão da Veiga and L. C. Berselli. On the regularizing effect of the vorticity direction in incompressible viscous flows. *Differential Integral Equations*, 15(3):345–356, 2002.

[4] D. Chae. On the regularity conditions for the Navier-Stokes and related equations. *Rev. Mat. Iberoam.*, 23(1):371–384, 2007.

[5] A. J. Chorin. The evolution of a turbulent vortex. *Comm. Math. Phys.*, 83(4):517–535, 1982.

[6] P. Constantin and C. Fefferman. Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(3):775–789, 1993.

[7] U. Frisch, P. L. Sulem, and M. Nelkin. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 87(4):719–736, 1978.

[8] E. Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Math. Nachr.*, 4:213–231, 1951.

[9] A. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynold's numbers. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 30:301–305, 1941.

[10] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63(1):193–248, 1934.

[11] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[12] H. Okamoto. Mathematical fluid dynamics. *Expositions of current mathematics*, 1999(Spring-Meeting):121–133, 1999.

[13] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[14] T. Tao. Global regularity for a logarithmically supercritical hyperdissipative navier-stokes equation. *arXiv preprint arXiv:0906.3070*, 2009.

[15] Z. Xiao, M. Wan, S. Chen, and G. L. Eyink. Physical mechanism of the inverse energy cascade of two-dimensional turbulence: a numerical investigation. *J. Fluid Mech.*, 619:1–44, 2009.