局所コホモロジー群の直観的表示とその応用について

小森大地 (KOMORI Daichi)*

1　導入

現在, よく知られた超関数の理論の一つとして佐藤の hyperfunction があるが, これは代数的な道具立てを用いることで 1958 年に佐藤幹夫によって考案された.

Definition 1.1. $\mathcal{O}_X$ を X 上の正則関数の層, $\mathbb{Z}_X$ を $\mathbb{Z}$ を茎に持つ X 上の定数層とし, $\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ を M を台に持つ $\mathcal{O}_X$ の n 次導来層, $\omega_M = \mathcal{H}^n_M(\mathbb{Z}_X)$ を向き付け層とする. このとき *hyperfunction* の層 $\mathcal{B}_M$ は次で定義される.

$$\mathcal{B}_M = \mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \omega_M. \tag{1}$$

これが代数的な道具を用いて解析的な対象を研究する代数解析という手法の出発点であった. しかし, 上の定義の通り, 佐藤の理論はコホモロジー群を用いており, 抽象的かつ高度な手法を用いたため容易に理解できるものではなかった. そこで, 森本光生, 金子晃らは佐藤の hyperfunction に対してより理解が容易となる定義を与えた.

Definition 1.2. $F_j(z)$ を無限小楔 $M + i\Gamma_j 0$ $(1 \le j \le N)$ 上で定義された正則関数とする. この時, 形式和

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0) \tag{2}$$

を M 上の *hyperfunction* と呼び, $\{F_j(z)\}_j$ を一組の $f(x)$ の定義関数と呼ぶ.

この定義は, 佐藤の hyperfunction を直観的に理解する点で非常にわかりやすいものである. この発想は正則関数のみならず一般の層を係数とする局所コホモロジー群の表示にも応用できると考えられる. そこで局所コホモロジー群を直観的に表示できるような枠組みを構成し, 実際にコホモロジー群の直観的表示を与える. 具体的には, 局所コホモロジー群と直観的表示の間に境界値写像とよばれる写像を P.Schapira のアイデアに沿って構成する. さらに, 局所コホモロジー群の直観的表示を可能とする枠組みを構成し, 直観的表示と局所コホモロジー群とを結ぶ境界値写像およびその逆像の具体的理解を通して同型であることを見ていく.

* 北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程

2 準備

はじめに、X を全空間、M を X の部分空間で向きづけ可能でかつ可縮と仮定する. $\mathbb{R}^m$ の開単位球 D^m に対して $\widetilde{X} = M \times D^m$ と定義し、$\varphi(M) = M \times \{0\}$ を満たすような同型写像 $\varphi : X \to \widetilde{X}$ の存在を仮定する. 以下、この同型写像によって X と $\widetilde{X}$ を同一視する.

Definition 2.1. $k > 0$ とする. このとき S^{m-1} 上の線形 k 胞体 σ_k を以下で定義する.

$$\sigma_k = \varphi_k(\cap H_i) \cap S^{m-1} \tag{3}$$

ここで写像 $\varphi_k : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^m$ は単射であり H_i は $\mathbb{R}^{k+1}$ の開半空間である.

ここで、集合 Y に対してその stratification の定義を述べておく.

Definition 2.2. 集合 Y に対してその分割 $Y = \bigsqcup_{\alpha \in A} W_\alpha$ が Y の *stratification* であるとは、分割が局所有限であり、任意の組み合わせ (W_α, W_β) に対して次が成立するとき、またその時に限る.

$$\overline{W_\alpha} \cap W_\beta \neq 0 \text{ を仮定すると } W_\beta \subset \overline{W_\alpha} \text{ が成立する.}$$

各 W_α は *stratum* と呼ぶ.

Definition 2.3. χ を、各 *stratum* が S^{m-1} の線形胞体であるような S^{m-1} の *stratification* とする.

Definition 2.4. $\Delta(\chi)$ (*resp.* $\Delta_k(\chi)$) で χ のすべての胞体 (*resp.* χ のすべての k 胞体) の集合とする.

Definition 2.5. 任意の二つの S^{m-1} の *stratifications* χ と χ' に対して次が成り立つとき、その時に限り χ' は χ の細分であるという.

$$\text{任意の } \sigma' \in \Delta(\chi') \text{ に対してある } \sigma \in \Delta(\chi) \text{ が存在し } \sigma' \subset \sigma \text{ が成り立つ.}$$

この時その関係を $\chi \prec \chi'$ と記述することにする.

Definition 2.6. k 胞体 σ_1 と σ_2 が互いに接しているとは、ある $(k-1)$ 胞体 τ が存在し $\overline{\sigma_1} \cap \overline{\sigma_2} = \overline{\tau}$ を満たすときをいう.

Definition 2.7. 胞体 $\sigma \in \Delta(\chi)$ に対して開星状体 $\mathrm{St}_\chi(\sigma)$ を以下で定義する.

$$\mathrm{St}_\chi(\sigma) = \bigsqcup_{\sigma \subset \overline{\tau}} \tau. \tag{4}$$

Definition 2.8. S^{m-1} の部分集合 K に対して $\widetilde{X}$ 上の部分集合 $M * K$ を次で定義する.

$$M * K = \{(x, ty) \in M \times D^m \,;\, y \in K, 0 < t < 1\} \tag{5}$$

ここで $\mathcal{F}$ を X 上の $\mathbb{C}$ ベクトル空間の層とし、$\mathcal{W}$ を X 開集合の族、そして $\mathscr{T}$ を S^{m-1} の stratification の族で次の条件を満たすものとする.

任意の $\chi', \chi'' \in \mathscr{T}$ に対して、ある $\chi \in \mathscr{T}$ が存在し $\chi' \prec \chi, \chi'' \prec \chi$ が成立する.

さらに M の開近傍 $T \subset X$ が存在すると仮定する.

これらの $(\mathcal{W}, \mathscr{T}, T)$ に対して以下の 3 条件を仮定する.(これらの 3 条件をまとめて条件 $(*)$ と呼ぶことにする.)

1. 任意の $\chi \in \mathscr{T}$ と任意の $\sigma \in \Delta(\chi)$ に対して $M * \mathrm{St}(\sigma) \cap T \in \mathcal{W}$ が成立し、さらに次のコホモロジーが消滅する.

$$\mathrm{H}^k(M * \mathrm{St}(\sigma) \cap T, \mathcal{F}) = 0 \quad (k \neq 0). \tag{6}$$

2. (Existence of a finer asyclic stratification) 任意の $W \in \mathcal{W}$ に対して $\chi \in \mathscr{T}$ と M の開近傍 $U \subset T$ が存在し次の条件を満たす.
   (a) ある $\sigma \in \Delta(\chi)$ が存在して $M * \mathrm{St}(\sigma) \cap U \subset W$ を満たす.
   (b) 任意の $\sigma \in \Delta(\chi)$ に対して $M * \mathrm{St}(\sigma) \cap U \in \mathcal{W}$ が成立し、さらに次のコホモロジーが消滅する.

$$\mathrm{H}^k(M * \mathrm{St}(\sigma) \cap U, \mathcal{F}) = 0. \tag{7}$$

3. (Cone connectivity of W) $W \in \mathcal{W}$ とし、ある $\chi_1, \chi_2 \in \mathscr{T}$ に対して $\sigma_1 \in \Delta_{m-1}(\chi_1)$、$\sigma_2 \in \Delta_{m-1}(\chi_2)$ を固定する.　さらに $U \subset T$ を M の開近傍で次を満たすものとする.

$$M * \mathrm{St}(\sigma_k) \cap U \in \mathcal{W} \quad (k = 1, 2). \tag{8}$$

   このとき χ_1 と χ_2 の共通の細分となるような χ, l 個の $(m-1)$ 胞体 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l \in \Delta_{m-1}(\chi)$ そして M の開近傍 $V \subset T$ が次の条件を満たすようにとれる.
   (a) $\tau_1 \subset \sigma_1$ かつ $\tau_l \subset \sigma_2$.
   (b) 任意の $(k = 1, 2, \ldots, l-1)$ に対して τ_k と τ_{k+1} は互いに接している.
   (c) 任意の $(k = 1, 2, \ldots, l)$ に対して $M * \mathrm{St}(\tau_k) \cap V \subset W$.

3 主結果

2 章の仮定をふまえた上で局所コホモロジー群に対して次のような直観的表示を与える.

Definition 3.1 (直観的表示)**.** $\mathcal{F}$ を全体空間 X 上の $\mathbb{C}$-ベクトル空間の層, $\mathcal{W}$ を X の開集合の族とする. このとき局所コホモロジー群 $\mathrm{H}^m_M(X, \mathcal{F}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathrm{H}^m_M(X, \mathbb{Z}_X)$ の直観的表示 $\check{H}(\mathcal{F})$ を次で定義する.

$$\check{H}(\mathcal{F}) = \left(\bigoplus_{U \in \mathcal{W}} \mathcal{F}(U) \right) / \mathcal{R}. \tag{9}$$

ただし, $\mathcal{R}$ は以下の元で生成させる $\mathbb{C}$-ベクトル空間である.

$$f \oplus (-f|_V) \ (f \in \mathcal{F}(U),\ U, V \in \mathcal{W} \text{ かつ } V \subset U). \tag{10}$$

このように局所コホモロジー群に対して直観的表示を与えたとき, これは元の局所コホモロジー群と同型となる.

Theorem 3.2. 局所コホモロジー群とその直観的表示は同型である. すなわち次が成り立つ.

$$\mathrm{H}^m_M(X, \mathcal{F}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathrm{H}^m_M(X, \mathbb{Z}_X) \simeq \check{H}(\mathcal{F}) \tag{11}$$

参考文献

[1] 柏原正樹, 河合隆裕, 木村達雄, 代数解析学の基礎, 紀伊國屋数学叢書 18, 1980,

[2] M. Kashiwara and P. Schapira, Sheaves on Manifolds, Springer-Verlag,

[3] 金子晃, 超関数入門, 東京大学出版, 1996.