シュタルクハミルトニアンにおける一般化固有関数の非存在について

板倉 恭平 (Kyohei ITAKURA)*
神戸大学大学院理学研究科 数学専攻 博士課程後期課程

1 Introduction

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のシュレディンガー作用素 (ハミルトニアン) は，一般に次の形で表される．

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V; \quad p = -i\nabla = -i(\partial_1, \dots, \partial_d).$$

ここで，V は実数値関数であり，ポテンシャル関数と呼ばれる．このハミルトニアンのスペクトルを解析することで，考えている物理系での粒子の大まかな挙動を調べることができるが，中でも固有値の有無は，束縛状態の有無と対応している．すなわち，固有値があるならば，粒子は適当な有界領域に任意の時間に存在し，固有値がないのならば，粒子は時刻無限大で無限遠方に散乱される．固有値には対応する固有関数 (固有ベクトル) が存在するが，H は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のハミルトニアンなので固有関数も $L^2(\mathbb{R}^d)$ の元として考えるのが普通である．そのとき，固有関数は遠方で減衰していることになるが，エネルギー保存則の観点から見ると，この減衰が強いように思われる．つまり，固有関数を調べるには，$L^2(\mathbb{R}^d)$ よりも広い空間で考える方がより自然だということになる．そこで，超関数の意味で固有関数となっているものを一般化固有関数と呼ぶことにする．[IS] では V が適当な条件を満たす有界な関数の場合に対して，ベゾフ空間には一般化固有関数が存在し，ベゾフ空間よりも (重み付き空間の意味で) 狭い空間には一般化固有関数が存在しないことが示されている．これは L^2-固有関数の非存在よりも強い結果である．このような関数空間の決定はレーリッヒの定理と呼ばれる．

[IS] で用いられた証明方法を応用することで，1 次元シュタルクハミルトニアンに対するレーリッヒの定理が得られたので，今回はその事についてお話ししたいと思っている．次節の議論の中で注目すべき点の一つとして，L^2-固有関数の非存在を示す際に広く用いられているものとは異なる conjugate operator を用いている点を挙げておく．これにより今までよりも強い結果を導くことができている．

*itakura@math.kobe-u.ac.jp

2 Setting and result

2.1 Setting.

以下，空間の次元が 1 の場合を考える．シュタルクハミルトニアンとは空間に対して一様な電場を与えた物理系に対応するハミルトニアンで，次の形をしている．

$$H = \frac{1}{2}p^2 - Ex + q \quad \text{on } \mathcal{H}.$$

ここで，$E > 0$ は電場の強さを表し，q は摂動で有界な実数値関数であり，$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ とおいた．また，H の自己共役実現は Faris-Lavine の定理による ([RS] を参照)．

主結果を述べるためにいくつか準備をする．関数 $\chi, F \in C^\infty(\mathbb{R})$ を次を満たすように選ぶ．

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \le 1, \\ 0 & \text{for } t \ge 2, \end{cases} \quad \chi \ge 0, \quad \chi' \le 0 \tag{2.1}$$

であり，任意の固定した $0 < t_0 < 1/2$ に対し，

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \le t_0, \\ 1 & \text{for } t \ge 1, \end{cases} \quad F \ge 0, \quad F' \ge 0, \quad F(1/2) > 0.$$

そして

$$\eta = 1 - \chi(2x), \quad \tilde{\eta} = \eta F^{-2}$$

とおく．さらに conjugate operator として次のものを導入する．

$$A = \mathrm{Re}(x^{-1/2}Fp) = \frac{1}{2}(x^{-1/2}Fp + pFx^{-1/2}).$$

このとき，A は次のように書き換えられることに注意しておく．

$$A = pFx^{-1/2} + \frac{i}{2}(\nabla x^{-1/2}F) = x^{-1/2}Fp - \frac{i}{2}(\nabla x^{-1/2}F). \tag{2.2}$$

また，カットオフ関数 ℓ と付随する偏微分作用素 L を導入する．

$$\ell = 1 - \tilde{\eta}F^2, \quad L = p\ell p. \tag{2.3}$$

(2.2) と (2.3) を用いることで H は以下の形に書き換えられる．

$$H = \frac{1}{2}A\tilde{\eta}xA + \frac{1}{2}L - Ex + q_0.$$

Condition 2.1 摂動 q は $L^\infty(\mathbb{R})$ に属する実数値関数とする．さらに，ある実数値関数による分解：

$$q_0 = q_1 + q_2; \quad q_1 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),\ q_2 \in L^\infty(\mathbb{R}),$$

が存在して，ある $\rho, C > 0$ に対して次の評価が $x > 0$ で成り立つ．

$$q_1' \le Cx^{-\rho}, \quad |q_2| \le Cx^{-1/2-\rho}.$$

次に関数空間を設定していく．$s \in \mathbb{R}$ に対して，重み付きヒルベルト空間 $\mathcal{H}_s$ を

$$\mathcal{H}_s = \langle x \rangle^{-s} \mathcal{H}, \quad \langle x \rangle = 1 + x_+, \quad x_+ = \max\{x, 0\}$$

と定める．また，$\mathcal{H}_{\mathrm{loc}} = L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ とする．$B_R = \{x < R\}$ とし，定義関数：

$$G_\nu = \begin{cases} G(B_{R_{\nu+1}} \setminus B_{R_\nu}) & \text{for } \nu \geq 1, \\ G(B_2) & \text{for } \nu = 0, \end{cases} \qquad R_\nu = 2^\nu, \ \nu \geq 0$$

を考える．ここで $G(\Omega)$ は $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ の定義関数である．G_ν を用いて $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}^*$ をそれぞれ以下のように定める．

$$\mathcal{B} = \{\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}} \mid \|\psi\|_{\mathcal{B}} < \infty\}, \qquad \|\psi\|_{\mathcal{B}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} R_\nu^{1/4} \|G_\nu \psi\|_{\mathcal{H}},$$
$$\mathcal{B}^* = \{\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}} \mid \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} < \infty\}, \qquad \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} = \sup_{\nu \geq 0} R_\nu^{-1/4} \|G_\nu \psi\|_{\mathcal{H}}.$$

また，$\mathcal{B}_0^*$ を $C_0^\infty(\mathbb{R})$ の $\mathcal{B}^*$-ノルムでの閉包で定める．このとき，任意の実数 $s > 1/4$ に対して次の包含関係が成り立つ．

$$\mathcal{H}_s \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{H}_{1/4} \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq \mathcal{H}_{-1/4} \subsetneq \mathcal{B}_0^* \subsetneq \mathcal{B}^* \subsetneq \mathcal{H}_{-s}. \tag{2.4}$$

最後に，(2.1) の $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ を用いて $n > m \geq 0$ に対して $\chi_n, \bar{\chi}_n, \chi_{m,n} \in C^\infty(\mathbb{R})$ をそれぞれ次のように定める．

$$\chi_n = \chi(x/R_n), \quad \bar{\chi}_n = 1 - \chi_n, \quad \chi_{m,n} = \bar{\chi}_m \chi_n.$$

2.2 Rellich's theorem.

以下が得られた主結果である．

Theorem 2.2 Condition2.1 を仮定し，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．もし関数 $\phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ が条件：

(1) $(H - \lambda)\phi = 0$ が超関数の意味で成り立つ，

(2) 十分大きなすべての $m \geq 0$ に対して $\bar{\chi}_m \phi \in \mathcal{B}_0^*$ が成り立つ

を満たすならば，$\mathbb{R}$ 全体で $\phi = 0$ である．

ここで，包含関係 (2.4) により，次の Corollary が直ちに従う．

Corollary 2.3 H は固有値を持たない：$\sigma_{\mathrm{pp}}(H) = \emptyset$.

Theorem 2.2 の証明は 2 段階に分けて行われる．それは，先験的超指数減衰評価と超指数減衰固有関数の非存在であり，それぞれ次の命題で表現される．

Proposition 2.4 Condition 2.1 を仮定し，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．もし，関数 $\phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ がある $m_0 \geq 0$ に対して

(1) $(H-\lambda)\phi = 0$ が超関数の意味で成り立つ，

(2) $\bar{\chi}_{m_0}\phi \in \mathcal{B}_0^*$

を満たすならば， 任意の $\alpha \geq 0$ に対して $\bar{\chi}_{m_0}e^{\alpha x}\phi \in \mathcal{B}_0^*$ が成り立つ．

Proposition 2.5 Condition 2.1 を仮定し，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．もし，関数 $\phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ がある $m_0 \geq 0$ に対して

(1) $(H-\lambda)\phi = 0$ が超関数の意味で成り立つ，

(2) 任意の $\alpha \geq 0$ に対して $\bar{\chi}_{m_0}e^{\alpha x}\phi \in \mathcal{B}_0^*$ が成り立つ

を満たすならば，$\mathbb{R}$ 全体で $\phi(x) = 0$ である．

2.3 Airy function.

さて，$\mathrm{Ai}(x)$ をエアリー関数としよう．すなわち，$\mathrm{Ai}(x)$ は微分方程式：$y'' - xy = 0$ の解であり，有界かつ $x \to \infty$ で指数的に減衰している．このとき，$\mathrm{Ai}(-(2E)^{1/3}x)$ はシュタルクハミルトニアン：

$$H = \frac{1}{2}p^2 - Ex$$

の一般化固有関数となっている．さらに，$\mathrm{Ai}(x)$ は $x < 0$ において漸近展開：

$$\mathrm{Ai}\,(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-x)^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

を持つことが知られている ([Sc, p.621-627] を参照)．これより $\mathrm{Ai}(-(2E)^{1/3}x) \in \mathcal{B}^*$ を得る．この事実と，Theorem 2.2 を合わせることでレーリッヒの定理が得られる．すなわち，$\mathcal{B}^*$ はシュタルクハミルトニアンの一般化固有関数に対する正の無限遠方での減衰度の上限を与えている．

参考文献

[IS] Ito, K., Skibsted, E.: Stationary scattering theory on manifolds, I. Preprint, 2016

[RS] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics Ⅱ. New York: Academic Press 1975

[Si] Sigal, I. M.: Stark Effect in Multielectron Systems: Non-Existence of Bound States. Commun. Math. Phys. 122, 1-22, 1989

[Sc] Schleich, W. P.: Quantum Optics in Phase Space (Wiley-VCH, Berlin). 2001