ある例外的なアーベル多様体の非存在性について

奥村喜晶

東京工業大学理学院数学系

記号

本稿では $\mathbb{Q}$ で有理数体、$\mathbb{Z}$ で整数環を表す. 代数体 K に対しその代数閉包を $\bar{K}$、絶対ガロア群を $G_K := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ と書く. ℓ を素数とし、g, h, n などは正の整数を表す. また $C = C(n, g, K)$ などと書いた場合、C は n, g, K だけに依存して決まるような定数を意味する. 代数体 K 上で定義されるアーベル多様体 A に対して、$[A]$ で A の K-同型類をと書く.

1 導入

今回の講演では Rasmussen-Tamagawa 予想（[9]) と呼ばれる予想を扱う. これは大雑把な言い方をすれば、素数 ℓ が十分大きいとき ℓ に関して例外的な性質を持つアーベル多様体は存在しないことを主張するものである. ここでいう「例外的」とは、付随する法 ℓ 表現が非常に特殊ということである. この節では予想の定式化や主結果の紹介は後回しにして、おおよそどのような問題を考えるのかについて簡単に解説したい.

E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線、ℓ を素数とする. いま E の $\bar{\mathbb{Q}}$-有理点の集合 $E(\bar{\mathbb{Q}})$ はアーベル群の構造を持ち、その間の ℓ^n 倍写像 $[\ell^n] : E(\bar{\mathbb{Q}}) \to E(\bar{\mathbb{Q}})$ を考えることができる. この写像の核 $E[\ell^n] := \mathrm{Ker}([\ell^n])$ は階数 2 の自由 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-加群の構造を持ち、更にその加群の構造と整合的な絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の連続作用が定まる. 特に $n = 1$ のとき $E[\ell]$ は連続な $G_{\mathbb{Q}}$ 作用を持つ $\mathbb{F}_\ell$-ベクトル空間なので、これに対応する 2 次元 $\mathbb{F}_\ell$-線形表現

$$\bar{\rho}_{E,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_\ell}(E[\ell]) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$$

が定まる. これを E **に付随した法** ℓ **表現**という. これに対して Serre による次の結果がある:

定理 1.1 (Serre, [11])**.** 虚数乗法を持たない $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対して定数 $C = C(E) > 0$ が存在して、$\ell > C$ ならば $\bar{\rho}_{E,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ は全射.

つまり、法 ℓ 表現 $\bar{\rho}_{E,\ell}$ が全射とならないのは、有限個の例外的な ℓ に対してのみということである. これに対して Serre は例外的な素数 ℓ の評価を楕円曲線に依存せずに行えるか？という問題を提出した:

問題 1.2. 次を満たす (absolute な) 定数 $C > 0$ をとることができるか：虚数乗法を持たない任意の $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対して、$\ell > C$ ならば $\bar{\rho}_{E,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ は全射.

また「$\bar{\rho}_{E,\ell}$ が全射でない」という例外的状況を別のものに取り換えることで同様の問題を考えることができる. 実際、Mazur の結果を用いることで次が分かる:

定理 1.3. 任意の $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対して、$\bar{\rho}_{E,\ell}$ の像が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ の Borel 部分群に含まれるならば、 $\ell = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 37, 43, 67, 163$ のいずれかである.

注意 1.4. Dickson [3] による分類を用いると、$\bar{\rho}_{E,\ell}$ が全射でないならば $\bar{\rho}_{E,\ell}$ の像は次のいずれかの $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ の部分群に含まれる:

- Borel 部分群,
- split Cartan 部分群の正規化群,
- non-split Cartan 部分群の正規化群,
- 例外部分群 (i.e. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ への像が S_4, A_4, A_5 のいずれかと同型).

よって Mazur の結果は、問題 1.2 への部分的な回答を与えている.

一般の代数体 K とそれ上の g 次元アーベル多様体 A に対しても、同様の構成によって法 ℓ 表現 $\bar{\rho}_{A,\ell} : G_K \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$ を定義することができる. 楕円曲線の場合と同様に、この法 ℓ 表現の像も $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$ の中で「大きく」なることが分かっており、問題 1.2 と同様に例外的な素数 ℓ に関する問題を考えることができる.

2 Rasmussen-Tamagawa 予想

この節では Rasmussen-Tamagawa 予想とその uniform 版を定式化し、知られている先行研究をいくつか紹介する. 代数体 K と素数 ℓ に対し、$\tilde{K}_\ell$ を ℓ の外不分岐な $K(\mu_\ell)$ の最大 pro-ℓ 拡大とする. このとき K 上の g 次元アーベル多様体 A で $K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell$ となるものの同型類の集合

$$\mathscr{A}(K, g, \ell) := \{[A] \ ; \ K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell\}$$

を考える[1]. ここで $K(A[\ell^\infty])$ は K に $A[\ell^n], (n \geq 1)$ の元をすべて添加した体. この性質は次のように言い換えることができる:

命題 2.1. K 上のアーベル多様体 A と素数 ℓ に関して、以下はそれぞれ同値：

(i) $K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell$;

(ii) A は ℓ を割らないすべての K の有限素点で良還元を持ち、$K(A[\ell])/K(\mu_\ell)$ は ℓ-拡大;

(iii) A は ℓ を割らないすべての K の有限素点で良還元を持ち、A に付随した法 ℓ 表現 $\bar{\rho}_\ell : G_K \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$ は $A[\ell]$ の適当な基底を選ぶことで

$$\begin{pmatrix} \bar{\chi}_\ell^{a_1} & * & \cdots & * \\ & \bar{\chi}_\ell^{a_2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \bar{\chi}_\ell^{a_{2g}} \end{pmatrix}$$

で与えられる. ここで $\bar{\chi}_\ell$ は法 ℓ 円分指標、各 a_i は正の整数である.

[1] この条件は、付録で解説する伊原問題に関連して自然に現れる.

このような性質を満たすアーベル多様体の同型類は ℓ が十分大きい場合には存在しないことを主張するのが、次の Rasmussen-Tamagawa 予想である:

予想 2.2. ([9], Conjecture 1.) 代数体 K と正整数 $g > 0$ に対して定数 $C = C(K, g) > 0$ が存在し、$\ell > C$ ならば $\mathscr{A}(K, g, \ell) = \varnothing$.

注意 2.3. (1) 命題 2.1 より、 $[A] \in \mathscr{A}(K, g, \ell)$ となる A は ℓ を割る素点でのみ悪い還元を持つ可能性がある. Faltings の定理よりそのようなアーベル多様体の同型類は次元と定義体を固定すれば高々有限個であるので、$\mathscr{A}(K, g, \ell)$ は必ず有限集合である. つまり予想 2.2 は、$K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell$ となるアーベル多様体は有限個の ℓ に対してのみ存在し、特にそれらの同型類の個数は高々有限個であると主張している.

(2) 命題 2.1(iii) の言い換えによって、Rasmussen-Tamagawa 予想は前節で紹介したガロア表現に関する問題の一部であると理解することができる.

予想 2.2 では代数体 K を固定していたが、代わりに $K/\mathbb{Q}$ の拡大次数のみを固定して同様の主張を考えることができる. これが uniform 版 Rasmussen-Tamagawa 予想である:

予想 2.4. ([10], Conjecture 2.) 正整数 $n > 0$ と $g > 0$ に対して定数 $C = C(n, g) > 0$ が存在し、$\ell > C$ ならば

$$\bigcup_{[K:\mathbb{Q}]=n} \mathscr{A}(K, g, \ell) = \varnothing$$

が成り立つ.

次に先行研究をいくつか紹介する. まず予想 2.2 については、[9] において $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合と類数 1 の虚 2 次体ではない 2 次体上の楕円曲線の場合が解決された. その後、[10] では $\mathbb{Q}$ 上の 2 または 3 次元アーベル多様体の場合にも証明された. また Abel 多様体に何らかの条件を課した場合の結果[2] も多く知られている. 例えば [7] ではアーベル多様体がすべての有限素点で準安定還元を持つ場合、[1] ではある 2 次体上定義された QM を持つ 2 次元アーベル多様体の場合、[8] ではアーベル多様体が定義体上で虚数乗法を持つ場合にそれぞれ予想 2.2 が解決された.

予想 2.4 を証明するには、素数 ℓ を定義体 K に依存せずに上から評価しなければならない. 特に分岐に関する条件が固定できないため予想 2.2 よりも困難な点が多いが、いくつかの場合では証明されている. まず [10] ではすべての有限素点で準安定還元を持つ場合に証明がなされた. また [2] では $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で虚数乗法を持つ楕円曲線に対して証明され、次元が一般の場合は Lombardo 氏によって証明された:

定理 2.5 ([5], Theorem 1.3.)**.** n 次拡大 $K/\mathbb{Q}$ と整数 $g > 0$ に対して定数 $C = C(n, g) > 0$ が存在して次を満たす: もし $[A] \in \mathscr{A}(K, g, \ell)$ かつ $A_{\bar{K}}$ が虚数乗法を持つのであれば、$\ell \leq C$.

注意 2.6. [10] において、代数体の Dedekind ゼータ関数に関する一般 Riemann 仮説 (GRH) を仮定すると、これらの予想が非常に多くの場合で証明できることが示された. 実際、予想 2.2 は (GRH) の仮定の下ではすべての場合で証明され、予想 2.4 も定義体の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数が奇数であれば証明された. いずれの場合も (GRH) の下で成り立つ effective 版 Chebotarev 密度定理 ([6]) が強力な働きをしている.

[2] つまり、アーベル多様体に関する条件 $\mathscr{P}$ を満たす $\mathscr{A}(K, g, \ell)$ の元からなる部分集合 $\mathscr{A}(K, g, \ell)^{\mathscr{P}}$ が十分大きな ℓ では空になる、という類のの結果のことである.

3　結果

ここでは本稿の主結果を紹介する．K 上のアーベル多様体 A が**絶対単純**であるとは、底変換 $A_{\bar{K}}$ が単純であることとする．これは任意の有限次拡大 L/K に対して A_L が単純であることと同値である．いま $\mathscr{A}(K,g,\ell)$ の部分集合[3]

$$\mathscr{A}(K,g,\ell)^{\mathrm{as}} := \{[A] \in \mathscr{A}(K,g,\ell)\ ;\ A \text{ は絶対単純 }\}$$

について次の仮定を考える:

仮定 $(*)$ **.** $\mathscr{A}(K,g,\ell)^{\mathrm{as}}$ に対して予想 2.4 が成り立つ．即ち、ある定数 $C = C(n,g) > 0$ が存在して $\ell > C$ ならば、任意の n 次拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対して $\mathscr{A}(K,g,\ell)^{\mathrm{as}} = \varnothing$.

このとき次が主結果である:

定理 3.1. 仮定 $(*)$ の下で、予想 2.4 は成立する．よって特に $(*)$ の下で予想 2.2 が成立する．

また定理 3.1 の証明と定理 2.5 を組み合わせることで次の結果を得る:

定理 3.2. $\mathscr{A}(K,g,\ell)$ の部分集合

$$\mathscr{A}(K,g,\ell)^{\mathrm{CM}} := \{[A] \in \mathscr{A}(K,g,\ell)\ ;\ A_{\bar{K}} \text{ は虚数乗法をもつ部分アーベル多様体を持つ }\}$$

に対して予想 2.4 が成立する．

注意 3.3. 定理 3.2 は、定理 3.1 の証明の中で仮定 $(*)$ を用いる部分を定理 2.5 に置き換えることによって証明される．そのため虚数乗法に関する仮定は定理 2.5 を適用するためだけに必要とし、そのほかの議論には関係していない．これは、あるクラスのアーベル多様体に対して予想 2.4 が解けた場合、同様の方法によってそれを定理 3.2 のように拡張できることを意味している．しかし現段階ではこの方法で拡張できる結果が定理 2.5 以外には知られていない．

A　付録

ここでは Rasmussen-Tamagawa 予想の背景にある伊原問題 ([4]) について簡単に解説する．いま $X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$ とし、$\bar{X} := X_{\bar{\mathbb{Q}}}$ とおく．このとき $X, \bar{X}$ のエタール基本群と $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ (即ち、Spec($\mathbb{Q}$) のエタール基本群) の間にはホモトピー完全列と呼ばれる短完全列

$$1 \to \pi_1(\bar{X}) \to \pi_1(X) \to G_{\mathbb{Q}} \to 1$$

が存在する．ここで素数 ℓ に対して $\pi_1^{\ell}(\bar{X})$ を $\pi_1(\bar{X})$ の最大 pro-ℓ 商とすれば、上の完全列から定まる外 Galois 作用によって外 Galois 表現

$$\Phi_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1^{\ell}(\bar{X}))$$

を構成することができる．ここで $\mathrm{Out}(\pi_1^{\ell}(\bar{X}))$ は $\pi_1(\bar{X})$ の自己同型群をその内部自己同型のなす部分群で割ったものである．このような Galois 表現は一般に単射ではないため、その核 $\mathrm{Ker}(\Phi_\ell)$ には絶対ガロア群の情報が豊富に含まれていると期待されている．

[3] as は absolutely simple の頭文字である．

さて $\mathrm{Ker}(\Phi_\ell)$ による $\bar{\mathbb{Q}}$ の固定体を M_ℓ とおくと、$M_\ell/\mathbb{Q}(\mu_\ell)$ は ℓ の外不分岐な pro-ℓ 拡大となる．このとき、拡大 $M_\ell/\mathbb{Q}(\mu_\ell)$ が**最大の** ℓ の外不分岐な pro-ℓ 拡大となるかを問うたのが伊原問題である．即ち、$\mathbb{Q}(\mu_\ell)$ 上の ℓ の外不分岐な最大 pro-ℓ 拡大 Λ_ℓ に対して、$\Lambda_\ell = M_\ell$ が成り立つかどうかを考察する問題である．

もし $\mathbb{Q}(A[\ell^\infty]) \subset \Lambda_\ell$ となるようなアーベル多様体が数多く存在すれば、それらの性質から Λ_ℓ と M_ℓ との差を測れることが期待できる．ところが実際にはそのようなアーベル多様体は非常に珍しいということから提唱されたのが Ramsussen-Tamagawa 予想である．そのため伊原問題と Rasmussen-Tamagawa 予想の間には関連があるものの、Rasmussen-Tamagawa 予想が解決したからといって伊原問題の研究が進展するということにはならないと思われる．

参考文献

[1] K. Arai, *On the Rasmussen-Tamagawa conjecture for QM-abelian surfaces*, Algebraic number theory and related topics 2011, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B 44, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS),Kyoto, (2013), 185–196

[2] A. Bourdon, *A uniform version of a finiteness conjecture for CM elliptic curves*, Math. Res. Lett. **22**, (2015), 403–416

[3] L.E.Dickson,*Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*, teubner,Leipzig (1901).

[4] Y. Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplication*, Ann. of Math. **123** (1986), 43–106

[5] D. Lombardo, *On the uniform Rasmussen-Tamagawa conjecture in the CM case*, arXive:1511.09019v1

[6] J. C. Lagarias and A. M. Odlyzko, *Effective versions of the Chebotarev density theorem*, In *Algebraic number fields :* L*-function and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, Academic Press, London, (1977), 409–464

[7] Y. Ozeki, *Non-existence of certain Galois representations with a uniform tame ineartia weight*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2011), 2377–2395

[8] Y. Ozeki, *Non-existence of certain CM abelian varieties with prime power torsion*, Tohoku Math. J. **65**, (2013), 357–371

[9] C. Rasmussen and A. Tamagawa, *A finiteness conjecture on abelian varieties with constrained prime power torsion*, Math. Res. Lett. **15**, (2008), 1223–1231

[10] C. Rasmussen and A. Tamagawa, *Arithmetic of abelian varieties with constrained torsion*, Arxiv:1302.1477v1 (2013)

[11] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'order fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15**, (1972), 259–331

[12] A. Silverberg, *Fields of definition for homomorphisms of abelian varieties*, Journal of Pure and Applied Algebra **77**, (1992), 253–262