G_2 型ルート系のゼータ関数の特殊値について

門田 慎也 (Shin-ya KADOTA)*

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

概 要

ルート系のゼータ関数とは Zagier により定義された Witten のゼータ関数 (半単純 Lie 代数の有限次元既約表現にわたる級数で定義される関数) を一般化したもので, 小森-松本-津村によって定義され, 関数としての性質や特殊値の研究が行われている. 本稿では, 小森-松本-津村による G_2 型ルート系のゼータ関数の特殊値に関する予想について得られた結果を紹介する. 本研究は岡本卓也氏と田坂浩二氏との共同研究である.

1 Introduction

Zagier は [13] において $\mathbb{C}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して

$$\zeta_W(s,\mathfrak{g}) = \sum_{\varphi} \frac{1}{(\dim\,\varphi)^s}$$

という関数を定義した. ここで φ は $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{C}$ 上の有限次元既約表現の同値類全体にわたる. これを Witten のゼータ関数という. この級数の正の整数点での値がある種のモジュライ空間の体積を表すことを発見したのが Witten [12] であることからこのように名付けられた. 本来は半単純 Lie 代数に対して定義されるが

$$\zeta_W(s,\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) = \zeta_W(s,\mathfrak{g}_1)\zeta_W(s,\mathfrak{g}_2)$$

*E-mail : m13018c@math.nagoya-u.ac.jp

が成り立つことと, 半単純 Lie 代数は有限個の単純 Lie 代数の直和に分解できることから, 単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $\zeta_W(s,\mathfrak{g})$ を考えればよいことがわかる. 単純 Lie 代数は Killing-Cartan によって A_ℓ $(\ell \geq 1), B_\ell$ $(\ell \geq 2), C_\ell$ $(\ell \geq 3), D_\ell$ $(\ell \geq 4), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ のいずれかに分類されることが知られており, 単純 Lie 代数を 1 つ決めればその既約表現の次元は Weyl の次元公式によって計算することができる. つまり, 個々の 単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $\zeta_W(s,\mathfrak{g})$ のより明示的な表示を得ることができるのである. 小森-松本-津村は, この明示的な表示において不要な因子を取り除き, 多変数化したものを定義した. これがルート系のゼータ関数である. 現在では解析的な性質や特殊値について研究が盛んに行なわれている. 本稿のメインオブジェクトである G_2 型ルート系のゼータ関数は次のような明示的な表示をもつ:

$$\zeta_2(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6;G_2) = \sum_{m,n\geq 1} \frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}(m+3n)^{s_5}(2m+3n)^{s_6}}.$$

また, Zagier は [13] において次の多重級数も定義している:

$$\zeta_{EZ,r}(s_1,s_2,\ldots,s_r) := \sum_{0<n_1<n_2<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\ldots n_r^{s_r}}.$$

これは Euler-Zagier 型多重ゼータ関数とよばれ, [13] では $s_1,s_2,\ldots,s_r$ がすべて整数で絶対収束領域に入っている場合のみ議論されている. この Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の正の整数点における特殊値の事を多重ゼータ値とよび, 結び目理論や数論幾何, 数理物理と密接に関係していることが知られており, 重要な研究対象である. 以下では, r のことを depth という. $r=2$ つまり depth が 2 のものを Euler が研究していたためこのような名前になった. $r=1$ のものが Riemann のゼータ関数であるため Euler-Zagier 型多重ゼータ関数は Riemann ゼータ関数の一般化とみることができる. Euler の研究の中で, 重要な問題意識の 1 つに「どのような多重ゼータ値が Riemann ゼータ値でかくことができるか」というものがあった. 実際 Euler は自然数 k_1,k_2 が「$k_1+k_2 \leq 6$」または「k_1+k_2 が奇数かつ 12 以下」を満たすとき, $\zeta_{EZ,2}(k_1,k_2)$ は Riemann ゼータ値でかき表すことができることを証明し, さらに 「k_1+k_2 が奇数であればいつでも $\zeta_{EZ,2}(k_1,k_2)$ は Riemann ゼータ値でかき表すことができる」と予

想した．Tornheim [9] がこの予想を解決し, Borwein-Borwein-Girgensohn [1] および Huard-Williams-Zhang [3] によって $\zeta_{EZ,2}(k_1,k_2)$ の Riemann ゼータ値を用いた明示公式が与えられた．自然な発想として考えられるのは $\zeta_{EZ,3}(k_1,k_2,k_3)$ についてはどうなっているのかということであるが, それは Borwein-Girgensohn [2] が「$k_1+k_2+k_3$ が偶数であるとき $\zeta_{EZ,3}(k_1,k_2,k_3)$ は Riemann ゼータ値と depth が 2 の多重ゼータ値を用いてかくことができる」ということを示した．さらに彼らは [2] において次のような予想を立てた:

Conjecture 1.1. *自然数 $k_1,k_2,\ldots,k_r$ に対して, r と $k_1+k_2+\cdots+k_r$ の偶奇が異なれば, $\zeta_{EZ,r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ は depth が $r-1$ 以下の多重ゼータ値を用いて表すことができるのではないか?*

この予想は 津村 [10] や 井原-金子-Zagier [4] らによって解決された．我々は, このような性質のことを「Parity result」と呼んでいる．これまでに, Euler-Zagier 型以外の形の級数に対する Parity result が研究されており, 多くの結果が得られている ([3], [7], [8], [9], [11] など)．小森-松本-津村は [5], [6] において G_2 型ルート系のゼータ関数の関数等式や特殊値について議論しているのだが, その中で Parity result に似た次のような予想を立てた:

Conjecture 1.2 ([6])**.** *自然数 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6 に対して, $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6$ が奇数であるとき*

$$\zeta_2(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6;G_2) \overset{?}{\in} \mathbb{Q}[\{\zeta(j+1),L(j,\chi_3)\mid j\in\mathbb{N}\}].$$

ここで, χ_3 とは mod 3 の primitive な Dirichlet 指標である．この予想を解決したことが, 今回の Main result である．

2 Main result

Theorem 2.1. 自然数 $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ に対して, $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6$ が奇数であるとき $\zeta_2(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6; G_2)$ は

$$\zeta(2j)\zeta(k-2j), L(2j+1, \chi_3)L(k-2j-1, \chi_3) \quad (0 \leq j \leq \tfrac{k-3}{2})$$

の有理数係数の線型結合でかくことができる.

証明については講演中に触れる予定である.

参考文献

[1] D. Borwein, J. M. Borwein, R. Girgensohn, *Explicit evaluation of Euler sums*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **38** (1995), no. 2, 277–294.

[2] J. M. Borwein, R. Girgensohn, *Evaluation of triple Euler sums*, Electron. J. Combin. **3** (1996), no. 1, Research Paper 23, approx. 27 pp.

[3] J. G. Huard, K. S. Williams, N.-Y. Zhang *On Tornheim's double series*, Acta Arith. **75** (1996), no. 2, 105–117.

[4] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), no. 2, 307–338.

[5] Y. Komori, K. Matsumoto, H. Tsumura, *On Witten multiple zeta-functions associated with semi-simple Lie algebras IV*, Glasg. Math. J. **53** (2011), no. 1, 185–206.

[6] Y. Komori, K. Matsumoto, H. Tsumura, *On Witten multiple zeta-functions associated with semi-simple Lie algebras V*, Glasg. Math. J. **57** (2015), no. 1, 107–130.

[7] T. Okamoto, *Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type A_2, B_2 and G_2*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **61** (2012), no. 1, 9–27.

[8] T. Okamoto, *On alternating analogues of the Mordell-Tornheim triple zeta values*, J. Ramanujan Math. Soc. **28** (2013), no. 2, 247–269.

[9] L. Tornheim, *Harmonic double series*, Amer. J. Math. **72**, (1950). 303–314.

[10] H. Tsumura, *Combinatorial relations for Euler–Zagier sums*, Acta Arith. **111** (2004), no. 1, 27–42.

[11] H. Tsumura, *On alternating analogues of Tornheim's double series II*, Ramanujan J. **18** (2009), no. 1, 81–90.

[12] E. Witten, *On quantum gauge theories in two dimensions*, Comm. Math. Phys. **141** (1991), no. 1, 153–209.

[13] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel, 1994.