負の整数点での多重ゼータ関数の特異点解消と繰込みの関係について

小見山尚　(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)
Nao Komiyama　(Nagoya University)

2016 年 12 月 5 日記す.

1 Multiple zeta-function

複素数 $s_1, \ldots, s_n$ に対し次で定まる級数を**多重ゼータ関数 (MZF)** と呼ぶ。

$$\zeta(s_1, \ldots, s_n) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$$

この級数は、

$$\{(s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re(s_{n-k+1} + \cdots + s_n) > k \ (1 \leq k \leq n)\}$$

において絶対収束することが知られている。2000 年の初めになると Zhao([7]) と秋山、江上、谷川 ([1]) は独立に上記の関数が $\mathbb{C}^n$ 上に有理型接続できることを示した。特に、[1] では次のように MZF の具体的な極がすべて求められている。

命題 1.1 ([1])**.** 関数 $\zeta(s_1, \ldots, s_n)$ の極の集合は次で与えられる。

$$\left\{ (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} s_n = 1, \ s_{n-1} + s_n = 2, 1, 0, -2, -4, \cdots, \\ s_{n-k+1} + \cdots + s_n = k - r \ (3 \leq k \leq n, \ r \in \mathbb{N}_0) \end{array} \right\}$$

この命題から $n \geq 2$ に対しては $\zeta(s_1, \ldots, s_n)$ の極が無数に存在することが見て取れる。特に $n \geq 3$ では非正整数点はすべて特異点になることも分かる。

そこで、これら非正整数点での" 適切な" 特殊値を定めるために幾つかの研究がなされて来た。その中でも講演者は、古庄、小森、松本、津村の 4 氏によって導入された desingularization([4]) による desingularized value と、Ebrahimi-Fard、Manchon、Singer の 3 氏によって導入されたシャッフル積に関する renormalization([3]) による renormalized value の間の明示的な関係を [5] で与えた。前者は解析的な手法により与えられているのに対し、後者は代数的な手法に基づいて与えられている。またそれによりこれまで求められていなかった renormalized value の明示公式が [5] で得られたので、今回の講演ではそのことについて話す。

2 Desingularization

desingularized value について述べるために、まず desingularized MZF の定義を確認しよう。$c \in \mathbb{R}$ に対して母関数 $\tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \ldots, t_n; c) \in \mathbb{C}[[t_1, \ldots, t_n]]$ を次のように定める ([4] Definition 1.9)。

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \ldots, t_n; c) &:= \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\exp\left(\sum_{k=j}^{n} t_k\right) - 1} - \frac{c}{\exp\left(c \sum_{k=j}^{n} t_k\right) - 1} \right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (1 - c^m) B_m \frac{\left(\sum_{k=j}^{n} t_k\right)^{m-1}}{m!} \right)
\end{aligned}
$$

ここで、B_m $(m \geq 0)$ はベルヌーイ数で

$$
\frac{x}{e^x - 1} := \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} x^m
$$

によって与えられるとする。

定義 2.1 ([4] Definition 3.1)**.** $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{FKMT}}(s_1, \ldots, s_n) \\
&:= \lim_{\substack{c \to 1 \\ c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}} \frac{1}{(1-c)^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(e^{2\pi i s_k} - 1)\Gamma(s_k)} \int_{\mathcal{C}^n} \tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \ldots, t_n; c) \prod_{k=1}^{n} t_k^{s_k - 1} dt_k
\end{aligned}
$$

と定めこれを **desingularized MZF** と呼ぶ。ここで $\mathcal{C}$ は実軸上を無限大から ε まで動き原点の周りを反時計回りに一周回って無限大へ帰るような経路とする。

注意 2.2. この desingularized MZF は整関数として $\mathbb{C}^n$ 上に解析接続できることが [4] の Theorem 3.4 で示されている。

Desingularized MZF の特筆すべき点は MZF の有限" 線形" 和によってあらわせることである。不定元 u_j, v_j $(1 \leq j \leq n)$ に対し

$$
\mathcal{G}((u_j), (v_j)) := \prod_{j=1}^{n} \left(1 - (u_j v_j + \cdots + u_n v_n)(v_j^{-1} - v_{j-1}^{-1})\right)
$$

とする。ただし $v_0^{-1} := 0$ としておく。また整数の集合 $\{a_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}}\}$ を

$$\mathcal{G}((u_j),(v_j)) = \sum_{\substack{\boldsymbol{l}=(l_j)\in\mathbb{N}_0^n \\ \boldsymbol{m}=(m_j)\in\mathbb{Z}^n \\ \sum_{j=1}^n m_j=0}} a_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \prod_{j=1}^n u_j^{l_j} v_j^{m_j}$$

によって与える。このとき、次が成り立つ。

命題 2.3 ([4] Theorem 3.8)**.** 任意の $s_1,\dots,s_n \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\zeta_{\text{FKMT}}(s_1,\dots,s_n) = \sum_{\substack{\boldsymbol{l}=(l_j)\in\mathbb{N}_0^n \\ \boldsymbol{m}=(m_j)\in\mathbb{Z}^n \\ \sum_{j=1}^n m_j=0}} a_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \left(\prod_{j=1}^n (s_j)_{l_j}\right) \zeta(s_1+m_1,\dots,s_n+m_n).$$

ただし $(s)_k$ は Pochhammer 記号で、$k \in \mathbb{N}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し $(s)_0 := 1$ 、$(s)_k := s(s+1)\cdots(s+k-1)$ で与えられるものとする。

定義 2.4 ([4])**.** desingularized MZF の $(s_1,\dots,s_n) = (-k_1,\dots,-k_n)$ での値 $\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1,\dots,-k_n)$ を **desingularized value** と呼ぶ。

この desingularized value の母関数 $Z_{\text{FKMT}}(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{C}[[t_1,\dots,t_n]]$ を

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1,\dots,t_n) := \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} \frac{(-t_1)^{k_1}\cdots(-t_n)^{k_n}}{k_1!\cdots k_n!} \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1,\dots,-k_n) \quad (1)$$

と定めたとき、次が成り立つ。

命題 2.5 ([4] Theorem 3.7)**.** 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1,\dots,t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{(1-t_i-\cdots-t_n)e^{t_i+\cdots+t_n}-1}{(e^{t_i+\cdots+t_n}-1)^2}$$

これから次のような漸化式を得る。

系 2.6 ([5])**.** 任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ に対し、

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1,\dots,t_n) = Z_{\text{FKMT}}(t_2,\dots,t_n)\cdot Z_{\text{FKMT}}(t_1+\cdots+t_n)$$

これを $k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}_0$ として $\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1,\dots,-k_n)$ で書き換えると

$$\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1,\dots,-k_n) = \sum_{\substack{i_2+j_2=k_2 \\ \vdots \\ i_n+j_n=k_n}} \prod_{a=2}^n \binom{k_a}{i_a} \zeta_{\text{FKMT}}(-i_2,\dots,-i_n)\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1-j_2-\cdots-j_n) \quad (2)$$

を得る。但しここで $\binom{k_a}{i_a} := \frac{k_a!}{i_a!(k_a-i_a)!}$ とした。

3 Renormalization

Renormalization(日本語では**繰り込み**と呼ばれる) とは、そもそも量子場理論において値が発散してしまう計算結果に対し発散項を適切に除去することでその発散を解消する操作の事である。Connes と Kreimer は [2] において、Hopf 代数の言葉を用いて renormalization が行えることを示した。Ebrahimi-Fard、Manchon、Singer はこの Connes と Kreimer の方法を MZF に適用することで、特異点での" 特殊値" を与えることに成功した。Connes と Kreimer の主張を述べるために少し準備をしよう。

以下、$\mathcal{H}$ を $\mathbb{Q}$ 上の connected filtered Hopf 代数、$\mathcal{A} := \mathbb{Q}[\frac{1}{z}, z]] := \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$ を Laurent 級数全体からなる $\mathbb{Q}$-代数とする。このとき、$\mathbb{Q}$-線形写像 $\phi, \psi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ に対し **convolution** $\phi * \psi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ を

$$\phi * \psi := m_{\mathcal{A}} \circ (\phi \otimes \psi) \circ \Delta_{\mathcal{H}}$$

により定める。ただし $m_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の product、$\Delta_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の coproduct を表すとする。

また、$\mathcal{A}$ の部分代数 $\mathcal{A}_- := \frac{1}{z}\mathbb{Q}[\frac{1}{z}]$ と $\mathcal{A}_+ := \mathbb{Q}[[z]]$ に対し $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$ という分解を考える。このとき次が成り立つ。

定理 3.1 ([2], [3], [6]: **algebraic Birkhoff decomposition**)**.** $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ を $\phi(1) = 1$ を満たす $\mathbb{Q}$-線形写像とする。 このとき、

$$\phi = \phi_-^{-1} * \phi_+$$

を満たす $\phi_- : \mathcal{H} \to \mathbb{Q} \oplus \mathcal{A}_-$ と $\phi_+ : \mathcal{H} \to \mathcal{A}_+$ が一意に存在し $\phi_-(1) = 1$ を満たす。さらに ϕ が代数射のならば ϕ_- と ϕ_+ も代数射になる。

さて、この定理を MZF に適用するために以下で MZF にまつわる Hopf 代数を構成しよう。まず $L := \{d, y\}$ として、L^* を単位元 1 を持つ L の自由 monoid とする。また、$Y := \{1\} \cup L^* y$ として、$w \in Y$ に対し**深さ** $\mathrm{dp}(w)$ を w に現れる y の個数、**重さ** $\mathrm{wt}(w)$ を w に現れる文字の個数とする。そして、$\mathbb{Q}\langle L \rangle$ を L の元で生成される単位元を持つ結合的な非可換自由 $\mathbb{Q}$-代数とする。この $\mathbb{Q}\langle L \rangle$ に対し次のような $\mathbb{Q}$-線形写像 $\sqcup\!\sqcup_0 : \mathbb{Q}\langle L \rangle \otimes \mathbb{Q}\langle L \rangle \to \mathbb{Q}\langle L \rangle$ を考えると $(\mathbb{Q}\langle L \rangle, \sqcup\!\sqcup_0)$ は非結合的な非可換 $\mathbb{Q}$-代数になる。

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \sqcup\!\sqcup_0 w &:= w \sqcup\!\sqcup_0 \mathbf{1} := w \quad (w \in L^*), \\ yu \sqcup\!\sqcup_0 v &:= u \sqcup\!\sqcup_0 yv := y(u \ \sqcup\!\sqcup_0 \ v) \quad (u, v \in L^*), \\ du \sqcup\!\sqcup_0 dv &:= d(u \sqcup\!\sqcup_0 dv) - u \sqcup\!\sqcup_0 d^2 v \quad (u, v \in L^*). \end{aligned}$$

但し、$\sqcup\!\sqcup_0$ は $\mathrm{wt}(w)$ に関して帰納的に定めるものとする。

次に $\mathbb{Q}\langle L\rangle$ の元のうち末尾が d であるもので生成される部分空間として

$$\mathcal{T}_- := \langle\{wd \mid w \in L^*\}\rangle_{\mathbb{Q}},$$

を、$(\mathbb{Q}\langle L\rangle, \sqcup\!\sqcup_0)$ の元のうち次のような元で生成される両側イデアルとして

$$\mathcal{L}_- := \langle d^k\{d(u \sqcup\!\sqcup_0 v) - du \sqcup\!\sqcup_0 v - u \sqcup\!\sqcup_0 dv\} \mid k \in \mathbb{N}_0,\ u, v \in L^*\ \rangle_{(\mathbb{Q}\langle L\rangle, \sqcup\!\sqcup_0)},$$

を考える。すると、

$$\mathcal{H}_0 := \mathbb{Q}\langle L\rangle/(\mathcal{T}_- + \mathcal{L}_-).$$

は connected filtered Hopf 代数になる ([3] Corollary 3.22 参照)。また、$k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対し $\mathbb{Q}$-線形写像 $\phi : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{A}$ を次のように定める。

$$d^{k_1}y \cdots d^{k_n}y \mapsto \phi(d^{k_1}y \cdots d^{k_n}y)(z) := \partial_z^{k_1}\left(x\partial_z^{k_2}\right)\cdots\left(x\partial_z^{k_n}\right)(x(z))$$

但し、$\phi(1) := 1$ であり $x := x(z) := \frac{e^z}{1-e^z} \in \mathcal{A}$ かつ ∂_z は z による微分とする。すると、この $\mathcal{H}_0$ と ϕ に定理 3.1 が適用出来る。このとき ϕ は代数射になる[1]ので ϕ_+ も代数射になり、次のような定義が出来る。

定義 3.2 ([3] §4.2)**.** $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対し **renormalized value** を次のように定める。

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_n) := \lim_{z\to 0} \phi_+(d^{k_n}y \cdots d^{k_1}y)(z)$$

この renormalized value については次のような性質がある。

命題 3.3 ([3] Theorem 4.3)**.** 任意の $k_1 \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k_1) = \zeta(-k_1)$$

が成り立つ。また、$k_1 + k_2$ が奇数であるような $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k_1, -k_2) = \zeta(-k_1, -k_2).$$

が成り立つ。

すなわち特異点でない非正整数点においては通常の MZF の値と一致するのである。

[3] において renormalized value $\zeta_{\text{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_n)$ の計算方法は幾つか示されているが明示公式は与えられていない。今回はその中の次のような主張から出発して一般項を与えることが出来た。

[1] [3] Lemma 4.2 を参照のこと。

補題 3.4 ([3] Corollary 4.4)**.** $\mathrm{dp}(w) > 1$ を満たす $w \in Y$ に対し、

$$\phi_+(w) = \frac{1}{2^{\mathrm{dp}(w)} - 2} \sum_{(w)} \phi_+(w')\phi_+(w'').$$

が成り立つ。ただし、右辺の和は Hopf 代数 $\mathcal{H}_0$ の coproduct Δ_0 について次のような Sweedler's notation が与えられているものとする。

$$\Delta_0(w) := \sum_{(w)} w' \otimes w'' - 1 \otimes w - w \otimes 1$$

4 Main result

以下に、[5] において得られた主結果を述べよう。補題 3.4 から直接得ることが出来たのは次のような $\zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_n)$ の漸化式である。

命題 4.1 ([5])**.** 任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ と $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_n) = \frac{1}{2^{n-1} - 1} \left\{ \sum_{i_n + j_n = k_n} \binom{k_n}{i_n} \zeta_{\mathrm{EMS}}(-i_n) \zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_{n-1} - j_n) \right.$$

$$+ \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\substack{i_n + j_n = k_n \\ \vdots \\ i_p + j_p = k_p}} \prod_{a=p}^{n} \binom{k_a}{i_a}$$

$$\left. \times \sum_{\substack{\{\circ_q,\ \diamond_q\} = \{+,\ ,\} \\ p \leq q \leq n-1}} \zeta_{\mathrm{EMS}}(-i_p \circ_p \cdots \circ_{n-1} - i_n) \zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_{p-1} - j_p \diamond_p \cdots \diamond_{n-1} - j_n) \right\}$$

が成り立つ。

上記の命題 4.1 において $\zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_n)$ の漸化式を得たが、これはより簡単な形に出来る。

定理 4.2 ([5])**.** 任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ と $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_n) = \sum_{\substack{i_2 + j_2 = k_2 \\ \vdots \\ i_n + j_n = k_n}} \prod_{a=2}^{n} \binom{k_a}{i_a} \zeta_{\mathrm{EMS}}(-i_2, \ldots, -i_n) \zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1 - j_2 - \cdots - j_n) \tag{3}$$

この (3) 式と系 2.6 の (2) 式を見比べると同じ形になっていることが分かる。このことから desingularized value と renormalized value の母関数の間の関係式を得ることが出来る。

renormalized value の母関数 $Z_{\mathrm{EMS}}(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{C}[[t_1,\ldots,t_n]]$ を

$$Z_{\mathrm{EMS}}(t_1,\ldots,t_n):=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}\frac{(-t_1)^{k_1}\cdots(-t_n)^{k_n}}{k_1!\cdots k_n!}\zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1,\ldots,-k_n)$$

と desingularized value の (1) 式と同様に定める。このとき次が成り立つ。

定理 4.3 ([5])**.** 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$Z_{\mathrm{EMS}}(t_1,\ldots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-e^{-t_i-\cdots-t_n}}{t_i+\cdots+t_n}\cdot Z_{\mathrm{FKMT}}(-t_1,\ldots,-t_n)$$

が成り立つ。

これから次の系を得る。

系 4.4 ([5])**.** 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$Z_{\mathrm{EMS}}(t_1,\ldots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(t_i+\cdots+t_n)+(1-e^{t_i+\cdots+t_n})}{(t_i+\cdots+t_n)(1-e^{t_i+\cdots+t_n})}.$$

が成り立つ。具体的に $\zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1,\ldots,-k_n)$ で書き換えたものが次である。

$$\zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1,\ldots,-k_n)=(-1)^{k_1+\cdots+k_n}\sum_{\substack{\nu_{1i}+\cdots+\nu_{ii}=k_i\\1\le i\le n}}\prod_{i=1}^{n}\frac{k_i!}{\prod_{j=i}^{n}\nu_{ij}!}\frac{B_{\nu_{ii}+\cdots+\nu_{in}+1}}{\nu_{ii}+\cdots+\nu_{in}+1}$$

参考文献

[1] S.Akiyama, S.Egami, Y.Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta. Arith. 2001, no. 2, 107-116.

[2] A.Connes, D.Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, 2000, Comm. Math. Phys. 210(1):249-273.

[3] K.Ebrahimi-Fard, D.Manchon, J.Singer, *The Hopf algebra of (q)multiple polylogarithms with non-positive arguments*, 2015, arXiv:1503.02977.

[4] H.Furusho, Y.Komori, K.Matsumoto, H.Tsumura, *Desingularization of complex multiple zeta-functions*, 2015, arXiv:1508.06920, to appear in Amer. J. Math.

[5] N.Komiyama, *Equivalence between desingularized and renormalized values of multiple zeta functions at negative arguments*, in preparation.

[6] D.Manchon, *Hopf algebras in renormalization*, 2008, Handbook of algebra, Vol.5, 365-427.

[7] J.Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 2000, no. 5, 1275-1283.