Depth functions of monomial ideals

鈴木 タオ （Suzuki Tao）

大阪大学大学院情報科学研究科

概要

体上多項式環における斉次イデアルの深度函数を定義したのち, それに伴う深度極限, スタビリティナンバーを考える. それらに変数の個数を加えて, 3 者の関係を特徴付けた.

1 準備

以下, K を体とし, $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ を K 上 n 変数多項式環とする. そして I を R の斉次イデアルとする. まず, 環 S/I の **深度 (depth)** は,

$$\operatorname{depth} S/I = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid R \text{ 内に長さ } i \text{ の } S/I\text{- 正則列が存在する }\}$$

と定義される (詳しくは [3] を参照). ここで I の **深度函数 (depth function)** とは, 整数値函数

$$f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, f(k) = \operatorname{depth} S/I^k$$

のことをいう. つまり, これは I の各ベキによる剰余環の深度から成る数列のことである. 深度函数についての基本的な結果として, 次のことが知られている.

- $\min \operatorname{depth} S/I^k \leq n - l(I)$, ただし $l(I)$ は I の the analytic spread である [4].
- $\operatorname{depth} S/I^k$ は十分大きな k に対しては一定の値をとる [2].
- $\lim_{k\to\infty} \operatorname{depth} S/I^k \leq n - l(I)$ [2].

ここで, $\lim_{k\to\infty} \operatorname{depth} S/I^k$ とは, 十分大きな k に対して取れる一定値のことである. そしてこの値を I の **深度極限** という. また, 深度函数がはじめて深度極限となるようなベキの番号を, I の **スタビリティナンバー** といい, $\operatorname{dstab}(I)$ で表す.

一般に, 深度函数について, 極限と比べるとはじめの方の振る舞いはよく分からない. 実際に, 極限については上の 3 つに加えて,

$$\text{随伴次数付環 } \operatorname{gr}_I(R) \text{ が } Cohen-Macaulay \text{ 環ならば, } \lim_{k\to\infty} \operatorname{depth} S/I^k = n - l(I)$$

となることが知られている [5]. 例えば, R と I の Rees 環が Cohen-Macaulay なら, $\operatorname{gr}_I(R)$ もそうなる。一方で, はじめの方の振る舞いについては,

$$\operatorname{depth} S/I \geq \operatorname{depth} S/I^2 \geq \ldots,$$

となりそうだが, これは正しくない. 実際に, 次の驚くべき定理が示されている.

Theorem 1.1　([7, Theorem 4.1]) 勝手な極限を持つ非減少函数 $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, ある多項式環の単項式イデアル I が存在して, I の深度函数は f に一致する.

Remark 1.2　この定理の証明では, 条件を満たすイデアルの生成系を次のように具体的に与えている. まず,

- $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を極限を持つ非減少函数,
- n を $\lim_{k\to\infty} f(k)$,
- $d-1$ を f が初めて一定になる番号,

としたとき,

- $k = 1, \ldots, d-2$ に対して, $c_{d-k} = n - f(k)$,
- $S = K[x_1, x_2, y_1, \ldots, y_n]$,
- $I \subset S$ を次の生成系を持つ単項式イデアル;

$$(x_1^{d+1}, x_1^d x_2, x_1 x_2^d, x_2^{d+1}) \cup \bigcup_{k=2}^{d-1} (x_1^{d-1} x_2^k y_1, \ldots, x_1^{d-1} x_2^k y_{c_k}),$$

とすると, I の深度函数は f と一致する.
これにより, 単調増加なものは全て作れる. つまり, 直感に反する例はいくらでも存在する. しかし, 変数の個数は $n+2$, 深度極限は n であるから, 変数の個数と深度極限が 3 以上異なる例は作れない.

また一方で, 次のような特殊な例が発見されている.

Example 1.3　([1, Theorem 1]) n を非負整数とする. I を $B = K[a, b, c, d, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]$ の単項式イデアルで, 次の生成系を持つとする;

$$a^6, a^5 b, ab^5, b^6, a^4 b^4 c, a^4 b^4 d, a^4 x_1 y_1^2, b^4 x_1^2 y_1, \ldots, a^4 x_n y_n^2, b^4 x_n^2 y_n$$

このとき,

$$\operatorname{depth} B/I^n = \begin{cases} 0, & (\text{k が奇数かつ } k \leq 2n+1 \text{ のとき}), \\ 1, & (\text{k が偶数かつ } k \leq 2n \text{ のとき}), \\ 2, & (k \geq 2n+2 \text{ のとき}), \end{cases}$$

となる.

Remark 1.4　見て分かるように, この例は n 個の極大値を持つ. この例は, 深度函数には”おかしな”ものが存在すると言っている. ちなみに, 変数の個数が $n+4$, 深度極限が 2, スタビリティナンバーが $2n+2$ である.

このようにどのような深度函数が存在し得るかはよく分かっていない. そして, 勝手な, 極限をもつ非減少函数は作れはするが, 変数の個数, 深度極限, スタビリティナンバーの間には条件が付く. そこで,

一般に, 深度函数について, これら 3 者の間に条件が付くか, 付くならどのようなものか, というのが私の問いである.

2　主定理

次の定理が問いの答えである.

Theorem 2.1　$n \geq 3$ と仮定する. $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数多項式環, $I \neq (0)$ を S の単項式イデアルとする. ここで $\lim_{k\to\infty} \operatorname{depth} S/I^k = d$, $r = \operatorname{dstab}(I)$ とすると, 次のうちどちらかが成り立つ;

- $0 \leq d \leq n-2$ かつ $r \geq 1$,
- $d = n-1$ かつ $r = 1$.

逆に, 上の条件のどちらかを満たすような整数 d と r について, ある多項式環 S の単項式イデアル J が存在して, $\lim_{k\to\infty} \operatorname{depth} S/J^k = d$, $r = \operatorname{dstab}(J)$ となる.

Remark 2.2　主張で本質的なのは, 後半部分である. つまり, 変数の個数を固定したとき, どんな深度極限とスタビリティナンバーをもつ深度函数でも作れることを定理で示した. また,

- $n = 1$ のとき, $d = 0$, $r = 1$.
- $n = 2$ のとき, $d = 0$, $r = 1$ または $d = 1$, $r = 1$.

となる.

以下の主張を組み合わせることで主定理を証明することができる. それらを紹介してこのレポートを締めることにする.

Example 2.3　$t \geq 2$ を整数, $I = (x^t, xy^{t-2}z, y^{t-1}z)$ を多項式環 $B = K[x, y, z]$ のイデアルとする. このとき,

$$\operatorname{depth} B/I^n = \begin{cases} 1, & (\ n \leq t-1 \text{ のとき}), \\ 0, & (\ n \geq t \text{ のとき}), \end{cases}$$

となる.

Example 2.4　$r \geq 2$ を整数, $J_1 = (x_1^r, x_1x_2^{r-2}x_3, x_2^{r-1}x_3)$ を多項式環 $A := K[x_1, x_2, x_3]$ のイデアルとする. このとき,

$$\operatorname{depth} A/J_1^k = \begin{cases} 0, & (\ k \geq r \text{ のとき}), \\ 1, & (\ k \leq r-1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

となる.

Remark 2.5　この例は Theorem 1.1 から与えられる.

Example 2.6　$S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を多項式環, $0 \leq i \leq n$ を整数, $I = (x_1, \ldots, x_i) \subset S$ をイデアルとす

る．このとき, I の深度関数は $n-i$ で一定である．

Proposition 2.7 ([6, Proposition 2.9]) $A = K[x_1, \ldots, x_r]$, $B = K[y_1, \ldots, y_s]$ をそれぞれ異なる変数を持つ K 上多項式環とする．そして, $I \subset A$, $J \subset B$ をそれぞれの斉次イデアルとする．ここで $R = K[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s]$ を K 上多項式環として, $I + J$ を R のイデアルとみなす．このとき, J が一次式で生成されていると仮定すると,

$$\operatorname{depth} R/(I+J)^k = \min_{i \leq k} \operatorname{depth} A/I^i + \dim B/J$$

となる．

参考文献

[1] S. Bandari,J. Herzog and T. Hibi, Monomial ideals whose depth function has any given number of strict local maxima, *Ark. Mat.* **52** (2014),11–19.

[2] M. Brodmann, The asymptotic nature of the analytic spread, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **86** (1979), 35–39.

[3] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay Rings, *Cambridge Stud. Adv. Math.* **39**, Cambridge University Press, Cambridge, (1993).

[4] L. Burch, Codimension and analytic spread, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **72** (1972), 369–373.

[5] D. Eisenbud and C. Huneke, Cohen-Macaulay Rees Algebras and Their Specialization, *J. Alg.* **81** (1983), 202–224.

[6] H. T. Há, N. V. Trung and T. N. Trung, Depth and regularity of powers of sums of ideals, *Math. Z.* **282** (2016), 819–838.

[7] J. Herzog and T. Hibi, The depth of powers of an ideal, *J. Alg.* **291** (2005), 534–550.

[8] H. D. Nguyen and T. Vu, Powers of sums and their homological invariants, arXiv:1607.07380.