

# On the ranks of elliptic curves in towers of function fields

相川 勇輔 (Yusuke AIKAWA)\*

北海道大学大学院理学院数学専攻

## 1 Introduction

$K$  を標数 0 の体とする．方程式

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in K, 4a^3 + 27b^2 \neq 0)$$

で定義される曲線は  $K$  上の楕円曲線とよばれ，数学の様々な領域に現れる重要な対象である．楕円曲線は，与えられた有理点から次々に有理点を作り出せるという性質を備えている．つまり有理点の集合  $E(K)$  は群構造を持つ．一般にこの群は巨大なもの<sup>\*1</sup>であるが， $K$  が整数論的な体，つまり  $K$  が  $\mathbb{Q}$  あるいはその有限次拡大（代数体とよぶ）であるとき次の著しい定理が知られている．

**Theorem** (Mordell-Weil,[5]).  $K$  を代数体とする．このとき  $K$  上の楕円曲線  $E$  に対し  $E(K)$  は有限生成アーベル群である．つまり， $E(K)$  は

$$E(K) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus r} \oplus E(K)_{\text{tors}}$$

と書くことができる．ここで  $r \geq 0$  は整数で， $E(K)_{\text{tors}}$  は  $E(K)$  のねじれ元全体のなす有限アーベル群である．

この定理にちなんで  $E(K)$  を Mordell-Weil 群とよぶ． $E$  を射影化すれば点  $O = [0 : 1 : 0]$  は  $E(K)$  に入る．本稿では常にこの点を  $E(K)$  の単位元と考える．この  $r$  を楕円曲線  $E$  の階数とよぶ．

代数体上の代数多様体の有理点の研究は整数論の重要な研究課題の一つであるが，その素朴さとは裏腹に，実際に解こうとするとフェルマー予想のように極めて難しい場合が多い．楕円曲線においても  $E(K)$  の計算は最重要課題であるが，その解析はかなり難しく未だ謎が多い<sup>\*2</sup>．

さて，本研究で扱ったのは関数体  $\mathbb{C}(t)$  上の楕円曲線である．この場合も Mordell-Weil の定理の類似が成り立ち，従ってその階数が定まる．そこで，この階数について以下の問いを考える．

**Problem.**  $E$  を  $\mathbb{C}(t)$  上の楕円曲線で  $j_E \notin \mathbb{C}$  なるものとする．このとき， $\text{rank}E(\mathbb{C}(t^{\frac{1}{n}}))$  は  $n$  に関して有界だろうか？

これは Mazur による予想 ([2]) の関数体類似<sup>\*3</sup>であり， $\mathbb{F}_p(t)$  上で考えた場合は反例が構成されている ([7]) が，その一方で  $\mathbb{C}(t)$  上の楕円曲線の場合はいくつかの肯定的例が構成されているだけである ([1], [6])．筆者はこれらの例とは本質的に異なる新たな肯定的例の構成を行った．本稿ではその階数の計算方法を以下のような構成で解説を行いたい．§2 では楕円曲面について簡単に触れたあと，楕円曲線の有理点の問題を楕円曲面の幾何学的な問題へ翻訳する方法を解説する．§3 では本研究で扱った楕円曲線について考察する．§4 では先行研究と本研究を比較しつつ，得られた結果を述べる．

---

\* e-mail:yusuke@math.sci.hokudai.ac.jp

\*1 例えば  $E(\mathbb{C})$  はトーラスである．

\*2 例えば  $E(\mathbb{Q})$  の階数があるかどうか未だわかっていないし，ミレニアム問題の一つである BSD 予想も楕円曲線の階数に関するものである．

\*3 代数体と関数体とはとてもよく似ており，整数論の問題においてはこれらの類似を辿るという手法がよく使われてきた．

## 2 MW groups and NS groups

関数体上で楕円曲線を考える利点は、その有理点の研究に幾何学的テクニックが使えることである。ここでは、楕円曲線の有理点の問題を楕円曲面の幾何学的問題に移す方法について、本稿で必要な範囲で簡単に復習する。楕円曲面の一般論について詳しくは [4] を参照されたい。

**Definition.**  $\mathcal{X}$  を  $\mathbb{C}$  上の非特異射影曲面、 $C$  を  $\mathbb{C}$  上の非特異射影曲線とする。全射正則写像  $f: \mathcal{X} \rightarrow C$  が楕円曲面であるとは次が満たされるときをいう。

- i). ほとんど全ての  $v \in C$  に対し  $f^{-1}(v)$  は  $\mathbb{C}$  上の楕円曲線である。
- ii). 全てのファイバーが第 1 種例外曲線を含まない。

以下、混乱のない場合は楕円曲面  $f: \mathcal{X} \rightarrow C$  を単に  $\mathcal{X}$  と表す。

定義より楕円曲面ではほとんど全ての  $v \in C$  に対し  $f^{-1}(v)$  は楕円曲線となるが、特別な有限個の点  $v \in C$  でそのファイバー  $f^{-1}(v)$  に特異点をもつ曲線が現れる。これを特異ファイバーとよび、その現れ方が楕円曲面の幾何学的性質に強く影響を与える。特異ファイバーの型は完全に分類されており、そのどれが現れるか定義方程式から決定する Tate によるアルゴリズムも知られている。

以下本稿では曲線  $C$  として  $\mathbb{P}^1$  のみを考えるが、本節で述べる内容は一般の非特異射影曲線  $C$  上の楕円曲面を考えても同様に成り立つ。さてこのとき  $E$  を  $\mathbb{C}(t)$  上の楕円曲線とすると、セクションを持つ楕円曲面  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$  であって、 $f$  の生成ファイバーが  $E$  と  $\mathbb{C}(t)$  上同型となるものが一意に存在する。この対応関係でもって  $E(\mathbb{C}(t))$  の問題を楕円曲面へ翻訳したい。

$E(\mathbb{C}(t))$  と  $f$  のセクション<sup>\*4</sup>の集合の間には一対一対応があり、以下両者を同一視する。このもとで  $E(\mathbb{C}(t))$  の単位元に対応するセクションをゼロセクションとよぶ。さらにセクションの像を考えることにより  $E$  の有理点は  $\mathcal{X}$  内の曲線に対応する。つまり、射  $E(\mathbb{C}(t)) \rightarrow NS(\mathcal{X})$  が得られる。ここで  $NS(\mathcal{X})$  は  $\mathcal{X}$  内の既約な曲線の集合で生成される自由アーベル群を代数同値とよばれる同値関係で割ったものであり、 $\mathcal{X}$  の Néron-Severi 群とよばれる。そしてこの射は次の同型を導く。

**Theorem ([3]).**  $E$  を  $\mathbb{C}(t)$  上の楕円曲線とし、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$  を対応する楕円曲面とし少なくとも一つの特異ファイバーを持つとする。このとき、上記の対応は同型

$$E(\mathbb{C}(t)) \simeq NS(\mathcal{X})/T$$

を導く。ここで  $T \subset NS(\mathcal{X})$  は  $\mathcal{X}$  のゼロセクション、一般ファイバーおよびファイバーの既約成分で生成される部分群である。

Néron-Severi 群も難しい対象であるが、 $NS(\mathcal{X}) \simeq H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}$  なる同型が知られており、Hodge 理論により捉えることができる<sup>\*5</sup>。これらの同型によって、 $E(\mathbb{C}(t))$  上の楕円曲線の有理点の研究に Hodge 理論を用いたアプローチが可能となる。

## 3 Setting

次の方程式で定まる  $\mathbb{C}(t)$  上の楕円曲線を考える。

$$E: y^2 = 2x^3 - 3x^2 + \alpha - t \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}). \quad (1)$$

以下、 $\alpha$  に関するある条件の下で、この曲線が §1 で述べた問題を肯定する例になっていることをみていく。まず  $\alpha$  を固定してこの楕円曲線を考える。

この楕円曲線から定まる楕円曲面を  $f: \mathcal{X}_\alpha \rightarrow \mathbb{P}^1$  と書く。§2 で述べたことから

$$E(\mathbb{C}(t)) \simeq NS(\mathcal{X}_\alpha)/T$$

<sup>\*4</sup>  $f$  のセクションとは射  $s: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{X}$  であって  $f \circ s = id_{\mathbb{P}^1}$  なるもののことである。

<sup>\*5</sup> Hodge 構造について簡単に補足する。重さ  $n$  の Hodge 構造とは、有限型  $\mathbb{Z}$  加群  $H_{\mathbb{Z}}$  とその持ち上げ  $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$  の分解  $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$  であって  $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$  なるデータの組みのことである。 $h^{p,q} := \dim H^{p,q}$  を Hodge 数とよぶ。非特異射影代数多様体  $X$  に対しそのコホモロジー  $H^i(X, \mathbb{Z})$  は Hodge 構造を持つ。Hodge 理論について詳しくは [8]。

という同型が存在する．しかし，考えるべきは  $E(\mathbb{C}(t^{\frac{1}{n}}))$  であった．この群に話を結びつけるために，楕円曲面  $\mathfrak{X}$  から新たな楕円曲面  $\mathfrak{X}_{\alpha,n}$  を次のように構成する． $\mathfrak{X}_{\alpha}$  を  $g_n : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1; t \mapsto t^n$  でベースチェンジしたものを  $\widetilde{\mathfrak{X}}_{\alpha,n}$  とし， $\mathfrak{X}_{\alpha,n}$  をその極小な特異点解消と定義する．

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{X}_{\alpha,n} & \xrightarrow{\text{desing}} & \widetilde{\mathfrak{X}}_{\alpha,n} & \longrightarrow & \mathfrak{X}_{\alpha} \\
 & \searrow & \downarrow & \square & \downarrow f \\
 & & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

このようにして楕円曲面  $\mathfrak{X}_{\alpha,n}$  を構成すると，

$$E(\mathbb{C}(t^{\frac{1}{n}})) \simeq NS(\mathfrak{X}_{\alpha,n})/T_n$$

なる同型が得られる．ここで  $T_n$  は  $\mathfrak{X}_{\alpha,n}$  のゼロセクション，一般ファイバーおよびファイバーの既約成分で生成される部分加群である．Tate のアルゴリズムを用いると， $\mathfrak{X}_{\alpha,n}$  は次の特異ファイバーを持つことがわかる． $2n$  個の点  $t = \sqrt[n]{\alpha}\zeta_n^k, \sqrt[n]{1-\alpha}\zeta_n^k (k = 1, \dots, n)$  \*6において  $I_1$  型， $t = \infty$  においては場合分けが生じ  $n$  が 6 の倍数のときは滑らかであり，そうでない場合は  $n \equiv 1, 2, 3, 4, 5 \pmod{6}$  に従い  $II^*, IV^*, I_0^*, IV, II$  型が現れる．以下， $n = 6a - b (a \geq 1, b = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$  と書き，場合分けを回避するために  $b \neq 0$  を仮定する． $b = 0$  のときも議論は同様である．すると， $\mathfrak{X}_n$  の Hodge 数は以下ようになる．

$$\begin{aligned}
 h^{0,0} &= 1 \\
 h^{1,0} &= 0 & h^{0,1} &= 0 \\
 h^{2,0} &= a - 1 & h^{1,1} &= 10a & h^{0,2} &= a - 1 \\
 h^{2,1} &= 0 & h^{1,2} &= 0 \\
 h^{2,2} &= 1
 \end{aligned}$$

$\mathbb{Q}$  上のベクトル空間  $M_n$  を次で定義する

$$M_n := H^2(\mathfrak{X}_{\alpha,n}, \mathbb{Q})/T_{n,\mathbb{Q}}.$$

ここで  $T_{n,\mathbb{Q}} := T_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  である． $M_n$  は自然にホッジ構造が導かれるので， $NS(\mathfrak{X}_n) \simeq H^2(\mathfrak{X}_n, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}$  なる同型とあわせれば計算すべきは

$$\text{rank} E(\mathbb{C}(t^{\frac{1}{n}})) = \dim_{\mathbb{Q}} M_n \cap M^{1,1} \quad (2)$$

となる． $M_n$  を調べるために  $\mathfrak{X}_{\alpha,n}$  の自己同型  $\sigma$  を次で定める．

$$\sigma : \mathfrak{X}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n \quad (x, y, t) \mapsto (x, y, \zeta_n t)$$

これより  $M_n$  は  $\mathbb{Q}[\sigma]$  加群とみなせる． $n$  の約数  $d$  に対して部分加群  $L_d$  を次で定める．

$$L_d := \text{Ker}(\Phi_d(\sigma) : M_n \rightarrow M_n).$$

ただし， $\Phi_d(X) \in \mathbb{Q}[X]$  は  $\zeta_d$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式である．すると

$$M_n \simeq \bigoplus_{d|n} L_d$$

であり， $L_d$  はその定義より  $M_n$  の部分 Hodge 構造なので式 (2) と合わせて

$$\text{rank} E(\mathbb{C}(t^{\frac{1}{n}})) = \dim M_n \cap M^{1,1} = \sum_{d|n} \dim L_d \cap L^{1,1}$$

なる等式が得られる．これより問題は  $n$  の各約数  $d$  に対し， $L_d \cap L^{1,1}$  の次元を決定することへ帰着された． $L_d$  は  $\mathbb{Q}(\zeta_d)$  上のベクトル空間と見なせ，その次元が 2 であることが示される．従って，その部分空間  $L_d \cap L^{1,1}$  の次元は 0 か 1 か 2 のいずれかであり，あとは各  $d$  に対しどの値をとるか決定すればよい．

\*6  $\zeta_n$  は 1 の原始  $n$  乗根である．

## 4 Result

以下, 特に断らない限り  $L_d$  を  $\mathbb{Q}(\zeta_d)$  上のベクトル空間として扱う. まず  $\dim L_d \cap L^{1,1} = 2$ , つまり  $L_d \cap L^{1,1} = L_d$  となる場合をみる. これは  $L_d$  の (1,1) パートが全体に一致するという事なので, このとき (2,0) パートと (0,2) パートは消えていなければならない. つまり, このケースはホッジ数の計算によって特定でき, 次が示せる.

**Proposition.**  $\dim L_d \cap L^{1,1} = 2 \iff h^{2,0} = h^{0,2} = 0 \iff d \leq 6$ .

このように  $L_d \cap L^{1,1}$  が全体に一致してしまう場合は比較的容易にわかる. 先行研究 [1],[6] において考察された楕円曲線は,  $\dim L_d = 1$  となるものであった. つまり, このような場合には  $n$  の各約数  $d$  に対し  $L_d \cap L^{1,1}$  が  $L_d$  に一致するかどうかを判定しさえすればよかった. しかし, 本研究で扱っている楕円曲線は  $\dim L_d = 2$  であり,  $L_d \cap L^{1,1}$  が  $L_d$  に一致するかどうかという問題だけでなく, 一致しなかった場合その次元が 0 なのか 1 なのかという新たな問題が生じることとなる. 本研究において筆者はこの問題を克服した. 以下その方針を簡単に説明する.

さて, この命題によりあとは  $d \geq 7$  のときを考察すればよい. まず, 楕円曲線の定義方程式に現れる  $\alpha$  を動かす. つまり,  $S := \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  とおき,  $g: X \rightarrow S$  であって  $g^{-1}(\alpha) = \mathcal{X}_{\alpha,n}$  なる滑らかなファイブレーションを考える. するとモノドロミー作用  $\pi_1(S, \alpha) \curvearrowright M_n = H^2(\mathcal{X}_{\alpha,n}, \mathbb{Q})/T_{\mathbb{Q}}$  が得られ, この作用は  $\sigma$  作用と可換なので  $\pi_1(S, \alpha)$  は各  $L_d$  へ作用する. このとき, 次が成り立つ.

**Proposition.**  $\alpha$  を超越数とする.  $\dim L_d \cap L^{1,1} = 1$  とすると,

$$\pi_1(S, \alpha) \rightarrow \text{Aut}(L_d)$$

の像は有限群である.

しかしながら  $d \geq 7$  においては次が成り立つ.

**Proposition.**  $d \geq 7$  のとき,

$$\pi_1(S, \alpha) \rightarrow \text{Aut}(L_d)$$

の像は無有限群である.

以上から  $\alpha$  が超越数で  $d \geq 7$  のとき  $\dim L_d \cap L^{1,1} = 0$  となることがわかる. まとめて次を得る.

**Theorem.**  $\alpha$  を超越数とし,  $E$  を方程式 (1) により定まる  $\mathbb{C}(t)$  上の楕円曲線とする. このとき,

$$\text{rank} E(\mathbb{C}(t^{\frac{1}{n}})) = \begin{cases} \sum_{d|n, 2 \leq d \leq 5} 2\varphi(d) + 2 & (n \equiv 0 \pmod{6}) \\ \sum_{d|n, 2 \leq d \leq 5} 2\varphi(d) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である. ここで  $\varphi$  は Euler 関数である.

## 参考文献

- [1] L.A.Fastenberg, Moduli-Weil groups in procyclic extensions of a function field, *Duke Math.J.*, **89**(1997),no.2,217-224.
- [2] B.Mazur, Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields, *Invent.Math.* **18**(1972),183-266.
- [3] T.Shioda, On the Moduli-Weil lattices, *Comment.Math.Univ.St.Paul.*, **39**(1990),no.2,211-240.
- [4] J.H.Silverman, Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves, Graduate Texts in Mathematics,151,*Springer-Verlag, New York*, 1994.

- [5] J.H.Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, 106, Springer, Dordrecht, 2009
- [6] P.Stiller, The Picard numbers of elliptic surfaces with many symmetries, *Pacific J.Math*, **128**(1987), no.1, 157-189.
- [7] D.Ulmer, Elliptic curves with large rank over function fields, *Ann.of Math.(2)*, **155**(2002), no.1, 295-315.
- [8] C.Voisin, Hodge theory and complex algebraic geometry I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 76, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.