

フレネ型枠付け可能曲線の展直可展面と定傾曲線

(Rectifying developable surfaces of framed base curves and framed helices)

本多 俊一

HONDA Shun'ichi

北海道大学大学院理学院数学専攻

1 概要

ユークリッド空間内のフレネ枠を持つ正則曲線 γ から生成される可展面の一つとして, [Izumiya-Katsumi-Yamasaki, 3] において導入された展直可展面 RD_γ がある. 本講演では, 展直可展面の概念を曲線 γ が特異点を持ち得る場合に拡張し, その基本的な性質を紹介する. 具体的には, フレネ型枠付け可能曲線 γ に対して展直可展面を定義し, [Honda-Takahashi, 2] における枠付き曲線の理論を利用する. γ に関するいくつかの不変量を導入し, 展直可展面の特異点型や定傾曲線との関係を調査した.

2 フレネ型枠付け可能曲線

以下, 扱う多様体及び写像は全て C^∞ -級である.

定義 2.1 (フレネ型枠付け可能曲線) I を区間とする. 空間曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して, 正則球面曲線 $\mathcal{T}: I \rightarrow S^2$ 及び関数 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, 任意の $t \in I$ に対して $\dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mathcal{T}(t)$ を満たすとき γ をフレネ型枠付け可能曲線と呼ぶ. このとき, $\mathcal{T}(t)$ を接ベクトル, $\alpha(t)$ を速度関数と呼ぶ.

注意 2.2 フレネ枠を持つ正則曲線 γ はフレネ型枠付け可能曲線である.

以下, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ をフレネ型枠付け可能曲線, $\mathcal{T}: I \rightarrow S^2$ を接ベクトル, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ を速度関数とする.

接ベクトル $\mathcal{T}(t)$ に対して, 主法線ベクトルを $\mathcal{N}(t) = \dot{\mathcal{T}}(t)/\|\dot{\mathcal{T}}(t)\|$, 従法線ベクトルを $\mathcal{B}(t) = \mathcal{T}(t) \times \mathcal{N}(t)$ で定義する. このとき, $\{\mathcal{T}(t), \mathcal{N}(t), \mathcal{B}(t)\}$ は $\gamma(t)$ に沿う正の枠で,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathcal{T}}(t) \\ \dot{\mathcal{N}}(t) \\ \dot{\mathcal{B}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}(t) \\ \mathcal{N}(t) \\ \mathcal{B}(t) \end{pmatrix}$$

を満たす. ただし,

$$\kappa(t) = \|\dot{\mathcal{T}}(t)\|, \quad \tau(t) = \frac{\det(\mathcal{T}(t), \dot{\mathcal{T}}(t), \ddot{\mathcal{T}}(t))}{\|\dot{\mathcal{T}}(t)\|^2}$$

である.

注意 2.3 $(\gamma, \mathcal{N}, \mathcal{B}) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ は 枠付き曲線 (付録A) であり, 曲率は $(\tau, -\kappa, 0, \alpha)$ で与えられる. $\mathcal{N}(t)$ 及び $\mathcal{B}(t)$ は $\mathcal{T}(t)$ に対して一意的に与えられるので, $(\tau, -\kappa, 0, \alpha)$ は曲線 $\gamma(t)$ と接ベクトル $\mathcal{T}(t)$ の組に関する不変量である. 一方, 定理 A.4 及び A.5 より, $\kappa(t), \tau(t), \alpha(t)$ に対して曲線論の基本定理 (存在と一意性) が成り立つ.

$\gamma(t)$ に沿ったベクトル値関数 $\mathcal{D} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\mathcal{D}(t) = \tau(t)\mathcal{T}(t) + \kappa(t)\mathcal{B}(t)$$

で定義し, ダルブー型ベクトル と呼ぶ. さらに, $\kappa(t) > 0$ より, 球面ダルブー型ベクトル $\bar{\mathcal{D}} : I \rightarrow S^2$ が以下で定義される:

$$\bar{\mathcal{D}}(t) = \frac{\tau(t)\mathcal{T}(t) + \kappa(t)\mathcal{B}(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}}.$$

球面ダルブー型ベクトル $\bar{\mathcal{D}}(t)$ は主法線ベクトル $\mathcal{N}(t)$ の球面双対である.

3 フレネ型枠付け可能曲線の展直可展面と定傾曲線

定義 3.1 (展直可展面) 写像 $\mathcal{RD}_\gamma : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\mathcal{RD}_\gamma(t, u) = \gamma(t) + u\bar{\mathcal{D}}(t) = \gamma(t) + u \frac{\tau(t)\mathcal{T}(t) + \kappa(t)\mathcal{B}(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}}$$

で定義し, γ の展直可展面と呼ぶ.

注意 3.2 γ の正則点が稠密な場合, 接ベクトル $\mathcal{T}(t)$ は正負の自由度を除いて一意に定まる. このことから, 展直可展面 \mathcal{RD}_γ の像も一意に定まる.

定義より \mathcal{RD}_γ は線織面であり (付録B), $\det(\gamma(t), \bar{\mathcal{D}}(t), \dot{\bar{\mathcal{D}}}(t)) = 0$ より, \mathcal{RD}_γ は可展面である. 以下で, γ 及び \mathcal{RD}_γ に関する2つの不変量 $\delta(t), \sigma(t)$ を導入する:

$$\delta(t) = \frac{\kappa(t)\dot{\tau}(t) - \dot{\kappa}(t)\tau(t)}{\kappa^2(t) + \tau^2(t)},$$

$$\sigma(t) = \frac{\alpha(t)\tau(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha(t)\kappa(t)}{\delta(t)\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}} \right), \quad (\text{ただし } \delta(t) \neq 0).$$

命題 3.3 ([1]) 以下が成り立つ:

- (1) 以下は同値である:
 - (i) $\mathcal{RD}_\gamma(t, u)$ は広義柱面である.
 - (ii) $\delta(t) \equiv 0$.
- (2) $\delta(t) \neq 0$ とする. このとき, 以下は同値である:
 - (iii) $\mathcal{RD}_\gamma(t, u)$ は広義錐面である.
 - (iv) $\sigma(t) \equiv 0$.

定理 3.4 ([1]) 以下が成り立つ:

- (1) (t_0, u_0) が \mathcal{RD}_γ の特異点であるための必要十分条件は,

$$\frac{\alpha(t_0)\kappa(t_0)}{\sqrt{\kappa^2(t_0) + \tau^2(t_0)}} + u_0\delta(t_0) = 0$$

が成り立つことである。

(2) (t_0, u_0) を \mathcal{RD}_γ の特異点とする。このとき、 \mathcal{RD}_γ が (t_0, u_0) においてカスプ状曲面 \mathbf{ce} に局所微分同相であるための必要条件は以下の (i), (ii) または (iii) が成り立つことである：

(i) $\delta(t_0) \neq 0$, $\sigma(t_0) \neq 0$ 及び

$$u_0 = -\frac{\alpha(t_0)\kappa(t_0)}{\delta(t_0)\sqrt{\kappa^2(t_0) + \tau^2(t_0)}}.$$

(ii) $\delta(t_0) = 0$, $\alpha(t_0) = 0$, $\dot{\delta}(t_0) \neq 0$ 及び

$$u_0 \neq -\dot{\alpha}(t_0)\kappa(t_0)\frac{\kappa^2(t_0) + \tau^2(t_0)}{\kappa(t_0)\ddot{\tau}(t_0) - \ddot{\kappa}(t_0)\tau(t_0)}.$$

(iii) $\delta(t_0) = 0$, $\alpha(t_0) = 0$ 及び $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$.

(3) (t_0, u_0) を \mathcal{RD}_γ の特異点とする。このとき、 \mathcal{RD}_γ が (t_0, u_0) においてツバメの尾 \mathbf{sw} に局所微分同相であるための必要条件は以下の (iv) が成り立つことである：

(iv) $\delta(t_0) \neq 0$, $\sigma(t_0) = 0$, $\dot{\sigma}(t_0) \neq 0$ 及び

$$u_0 = -\frac{\alpha(t_0)\kappa(t_0)}{\delta(t_0)\sqrt{\kappa^2(t_0) + \tau^2(t_0)}}.$$

ただし、 $\mathbf{ce} : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$; $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$, $\mathbf{sw} : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$; $(u, v) \mapsto (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ である。

正則空間曲線に対する定傾曲線の概念をフレネ型枠付け可能曲線に対して拡張し、展直可展面との関係を調べる。

定義 3.5 フレネ型枠付け可能曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して、定ベクトル $\mathbf{v} \in S^2$ と定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $t \in I$ に対して $\mathcal{T}(t) \cdot \mathbf{v} = c$ を満たすとき γ を定傾曲線と呼ぶ。

定義 3.5 は、特異点まで滑らかに拡張された接線が定ベクトルと一定の角度を保つことを意味する。この意味で、定義 3.5 は正則空間曲線に対する定傾曲線の概念の自然な拡張であると言える。

系 3.6 ([1]) 以下は同値である：

1. $\mathcal{RD}_\gamma(t, u)$ は広義柱面である,
2. $\gamma(t)$ は定傾曲線である,
3. $\delta(t) \equiv 0$.

4 例

例 4.1 (アステロイド) $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ で与える (図 1)。このとき、 $\mathcal{T}(t) = (1/5)(-3 \cos t, 3 \sin t, -4)$ を接ベクトル、 $\alpha(t) = 5 \cos t \sin t$ を速度関数として与える。計算により、 $\mathcal{N}(t) = (\sin t, \cos t, 0)$, $\mathcal{B}(t) = (1/5)(4 \cos t, -4 \sin t, -3)$, $\kappa(t) = 3/5$ 及び $\tau(t) = 4/5$ を得る。また、展直可展面は $\mathcal{RD}_\gamma(t, u) = (\cos^3 t, \sin^3 t, -u + \cos 2t)$ で与えられる。 $\delta(t) \equiv 0$ 及び系 3.6 より、 γ は定傾曲線であり、 $\mathcal{RD}_\gamma(t, u)$ は広義柱面である。一方、定理 3.4 (2)-(iii) より、 $\mathcal{RD}_\gamma(t, u)$ は $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ でカスプ状曲面に局所微分同相である (図 2)。

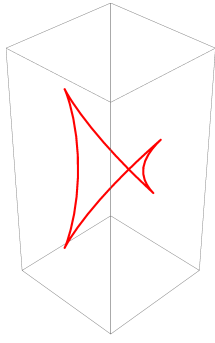


図1 例 4.1 の γ

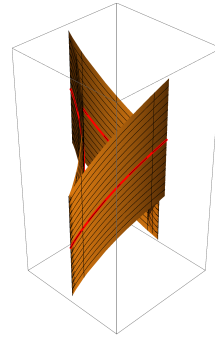


図2 例 4.1 の γ と \mathcal{RD}_γ

例 4.2 ((2, 3, 5)-タイプ) $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{5}t^5 \right)$$

で与える (図 3). このとき,

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^6}} (1, t, t^3)$$

を接ベクトル, $\alpha(t) = t\sqrt{1+t^2+t^6}$ を速度関数として与える. 計算により,

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{1+9t^4+4t^6}}{1+t^2+t^6}, \quad \tau(t) = \frac{6t\sqrt{1+t^2+t^6}}{1+9t^4+4t^6}$$

を得る. $\delta(0) = 6$, $\sigma(0) = 1/6$, $\alpha(0) = 0$ 及び 定理 3.4 (2)-(i) より, $\mathcal{RD}_\gamma(t, u)$ は $(0, 0)$ でカスプ状曲面に局所微分同相である (図 4).

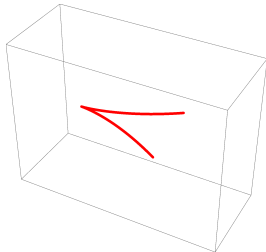


図3 例 4.2 の γ

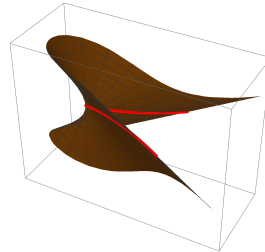


図4 例 4.2 の γ と \mathcal{RD}_γ

付録 A 枠付き曲線 ([2])

定義 A.1 (枠付き曲線) I を区間とする. 写像 $(\gamma, \nu_1, \nu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ が任意の $t \in I$ に対して以下の条件を満たすとき, 枠付き曲線と呼ぶ:

$$(1) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_1(t) = 0, \quad (2) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_2(t) = 0, \quad (3) \nu_1(t) \cdot \nu_2(t) = 0.$$

特に, 写像 (γ, ν_1, ν_2) がはめ込みであるとき, (γ, ν_1, ν_2) を枠付きはめ込みと呼ぶ.

定義 A.2 (枠付け可能曲線) 空間曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して, 球面曲線の組 $(\nu_1, \nu_2) : I \rightarrow S^2 \times S^2$ が存在し, 写像 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ が枠付き曲線であるとき, γ を枠付け可能曲線と呼ぶ.

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して, $\mu(t) = \nu_1(t) \times \nu_2(t)$ とする. このとき, $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \mu(t)\}$ は $\gamma(t)$ に沿う正の枠で,

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mu(t)$$

を満たす. ただし,

$$\ell(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t), \quad m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \mu(t), \quad n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \mu(t), \quad \alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \mu(t)$$

である. 写像 $(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ を枠付き曲線の曲率と呼ぶ.

定義 A.3 (枠付き曲線の合同) 2つの枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して, 回転 $X \in SO(3)$ 及び平行移動 $x \in \mathbb{R}^3$ が存在し, 任意の $t \in I$ に対して

$$(1) \tilde{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) + x, \quad (2) \tilde{\nu}_1(t) = X(\nu_1(t)), \quad (3) \tilde{\nu}_2(t) = X(\nu_2(t))$$

を満たすとき, 2つの枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ は合同であるという.

定理 A.4 (枠付き曲線の存在定理) $(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ を C^∞ -級写像とする. このとき, 枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ で (ℓ, m, n, α) を曲率とするものが存在する.

定理 A.5 (枠付き曲線の一意性定理) 2つの枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して, これらの曲率が一致するとする. このとき, 2つの枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ は合同である.

付録 B 線織面, 可展面 ([4])

定義 B.1 (線織面, 可展面) 空間曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 及び零でないベクトル $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して, 写像 $F_{(\gamma, \xi)} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $F_{(\gamma, \xi)}(t, u) = \gamma(t) + u\xi(t)$ で定義する. $F_{(\gamma, \xi)}$ を線織面, γ を導線, 固定した各 t_0 に対して得られる直線 $\gamma(t_0) + u\xi(t_0)$ を母線と呼ぶ. ガウス曲率が恒等的に 0 であるような線織面 $F_{(\gamma, \xi)}$ を可展面と呼ぶ.

線織面 $F_{(\gamma, \xi)}$ が可展面であることの必要十分条件は, 任意の $t \in I$ に対して,

$$\det(\gamma(t), \xi(t), \dot{\xi}(t)) = 0$$

が成り立つことである. ξ を正規化し, $\tilde{\xi} : I \rightarrow S^2$ を $\tilde{\xi}(t) = \xi(t)/\|\xi(t)\|$ で定義する. 任意の $t \in I$ に対して, $\dot{\tilde{\xi}}(t) = 0$ であるとき, $F_{(\gamma, \xi)}$ は広義柱面であるという. また, 任意の $t \in I$ に対して, $\dot{\tilde{\xi}}(t) \neq 0$ であるとき, $F_{(\gamma, \xi)}$ は非柱面的であるという. $F_{(\gamma, \xi)}$ が非柱面的であるとき,

$$\sigma(t) = \gamma(t) - \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \tilde{\xi}(t)}{\tilde{\xi}(t) \cdot \dot{\tilde{\xi}}(t)} \tilde{\xi}(t)$$

で表示される曲線を締括線と呼ぶ. $F_{(\gamma, \xi)}$ の特異点の像は締括線上に現れることが知られている. 締括線が定点であるとき, $F_{(\gamma, \xi)}$ は広義錐面であるという.

参考文献

- [1] S. Honda, Rectifying developable surfaces of framed base curves and framed helices, preprint.
- [2] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, *Advances in Geometry* **16** (2016), 265-276.
- [3] S. Izumiya, H. Katsumi and T. Yamasaki, The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve, *Banach Center Publications* **50** (1999), 137-149.
- [4] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Geometry of ruled surfaces*, *Applicable Mathematics in the Golden Age*, Narosa Publ. House, New Delhi (2003), 305-338.