

波面の主曲率とその応用

寺本 圭佑 (神戸大学大学院理学研究科数学専攻 D2)*

1 序

3次元ユークリッド空間 R^3 内のある種の特異点を許す曲面に波面と呼ばれるものがある。波面に生成的 (generic) に現れる特異点はカスプ辺とツバメの尾であることが知られている ([1])。近年、波面の微分幾何学的研究が活発に行われており、特異点の判定法や特異点の周りでの曲率の挙動、波面の内的な性質及び波面の大域的な性質 (Gauss-Bonnet 型定理など) が調べられている (例えば, [4, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 22, 20, 21] を参照)。

本講演ではまず、非退化特異点をもつ波面の主曲率関数の挙動と波面の不変量の関係を述べる。正則曲面の場合、臍点を除けば主曲率関数は二つ定まり、それらの積が Gauss 曲率、和が平均曲率の2倍をなす。しかし波面に対して、一般に Gauss 曲率や平均曲率は特異点の近くで非有界になることが知られている ([22, Theorem 3.1, Corollary 3.5])。このことから、主曲率関数の少なくとも一方は特異点の近くで非有界になると考えられる。したがって、どちらの主曲率関数が C^∞ 関数として特異点にまで拡張できるかという条件を波面の不変量を用いて述べる。次に、応用として波面の平行曲面や焦曲面に現れる特異点の型と波面の幾何学的性質との関係や焦曲面の幾何学的性質について説明する。

2 波面

2.1 波面の特異点とその判定法

$f: V \subset (R^2; u, v) \rightarrow R^3$ を C^∞ 写像とする。このとき、 f がフロントルであるとは、 f に沿った単位ベクトル場 ν が存在し、任意の $p \in V$ と任意の $X_p \in T_p V$ に対して、

$$\langle df(X_p), \nu(p) \rangle = 0$$

を満たすときをいう。さらに、 $L_f = (f, \nu): V \rightarrow R^3 \times S^2$ がはめ込みを与えるとき、 f を波面という (cf. [1, 11, 22])。ここで、 S^2 は R^3 内の単位球面を意味する。また、 ν を f の単位法ベクトルと呼ぶ。点 p が f の特異点であるとは、 f が p ではめ込みにならないときをいう。いま、 $S(f)$ で f の特異点集合を表すことにする。

フロントル f に対して、次の関数を定義する:

$$\lambda: V \rightarrow R, \quad \lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u, v).$$

この関数を符号付き面積密度関数と呼ぶ。定義から、 $S(f) = \lambda^{-1}(0)$ が成立する。特異点 $p \in S(f)$ が非退化で

* teramoto@math.kobe-u.ac.jp

あるとは、 $d\lambda(p) \neq 0$ が成り立つときをいう。このとき、陰関数定理から p を通る正則曲線 $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ で、 $S(f)$ を径数づけるものが存在する。さらに、非退化特異点は (余) 階数が 1 の特異点なので、 γ 上 $df(\eta) = 0$ を満たすベクトル場 η が存在する。上の曲線 γ とベクトル場 η をそれぞれ特異曲線、退化ベクトル場と呼ぶ。

非退化特異点 $p(= \gamma(0))$ に対して、 $\gamma'(0)$ と $\eta(0)$ が一次独立なとき、 p を第一種特異点、そうでなければ p を第二種特異点と呼ぶ ([14])。さらに、 p が第二種特異点であり、 $t \neq 0$ で $\gamma'(t)$ と $\eta(t)$ が一次独立であるとき、許容的な第二種特異点、そうでなければ許容的でない第二種特異点と呼ぶ。

定義 2.1. $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ 写像、 $p \in V$ とする。

- f が p でカスプ辺を持つとは、 f が (u, v^2, v^3) に局所微分同相であるときをいう。
- f が p でツバメの尾を持つとは、 f が $(u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv)$ に局所微分同相であるときをいう。
- f が p でカスプ的蝶を持つとは、 f が $(u, 4v^5 + uv^2, 5v^4 + 2uv)$ に局所微分同相であるときをいう。
- f が p でカスプ的唇を持つとは、 f が $(u, 3v^4 + 2u^2v^2, v^3 + u^2v)$ に局所微分同相であるときをいう。
- f が p でカスプ的嘴を持つとは、 f が $(u, 3v^4 - 2u^2v^2, v^3 - u^2v)$ に局所微分同相であるときをいう。

これらは波面の余階数が 1 の特異点である。カスプ辺は第一種特異点であり、ツバメの尾とカスプ的蝶は許容的な第二種特異点である。カスプ的唇とカスプ的嘴は退化した余階数が 1 の特異点である (図 1)。

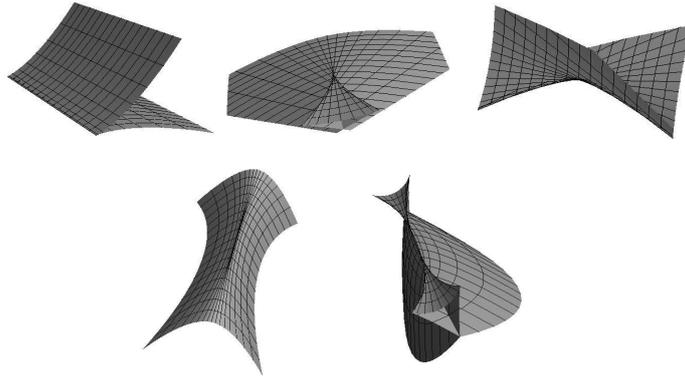


図 1 上段左から下段右にかけて、カスプ辺、ツバメの尾、カスプ的蝶、カスプ的唇、カスプ的嘴。

事実 2.2 ([9, 10, 11, 21]). $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面、 p を特異点とする。

- f が p でカスプ辺であるための必要十分条件は、 $\eta\lambda(p) \neq 0$ である。
- f が p でツバメの尾であるための必要十分条件は、 $d\lambda(p) \neq 0$, $\eta\lambda(p) = 0$, $\eta\eta\lambda(p) \neq 0$ である。
- f が p でカスプ的蝶であるための必要十分条件は、 $d\lambda(p) \neq 0$, $\eta\lambda(p) = \eta\eta\lambda(p) = 0$, $\eta\eta\eta\lambda(p) \neq 0$ である。
- f が p でカスプ的唇であるための必要十分条件は、 $\text{rank } df_p = 1$, $d\lambda(p) = 0$, $\det \text{Hess } \lambda(p) > 0$ である。
- f が p でカスプ的嘴であるための必要十分条件は、 $\text{rank } df_p = 1$, $d\lambda(p) = 0$, $\eta\eta\lambda(p) \neq 0$, $\det \text{Hess } \lambda(p) < 0$ である。

ただし、 λ は符号付き面積密度関数、 η は退化ベクトル場を意味する。

2.2 波面の不変量

ここでは、波面の不変量について述べる。詳細は、[7, 13, 14, 22]などを参照。

$f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面、 p をカスプ辺 (resp. 第二種特異点) とする。このとき、 p の周りで次を満たす座標系 $(U; u, v)$ がとれる ([11, 14, 22]):

- u 軸が特異曲線を与える。
- $\eta = \partial_v$ (resp. $\eta = \partial_u + \varepsilon(u)\partial_v$, ただし、 $\varepsilon(0) = 0$) が退化ベクトル場を与える。
- u 軸の他に特異点がない。

この座標系を適的な座標系とよぶ。以下ではこの座標系を用いて考える。

まず、波面 $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ が $p \in U$ でカスプ辺をもつとする。このとき、次の不変量が知られている。

$$\kappa_s(u) = \operatorname{sgn}(\lambda_v) \frac{\det(f_u, f_{uu}, \nu)}{\|f_u\|^3}(u, 0), \quad \kappa_\nu(u) = \frac{\langle f_{uu}, \nu \rangle}{\|f_u\|^2}(u, 0), \quad (2.1)$$

$$\kappa_c(u) = \frac{\|f_u\|^{3/2} \det(f_u, f_{vv}, f_{vvv})}{\|f_u \times f_{vv}\|^{5/2}}(u, 0), \quad (2.2)$$

$$\kappa_t(u) = \frac{\det(f_u, f_{vv}, f_{uvv})}{\|f_u \times f_{vv}\|^2}(u, 0) - \frac{\det(f_u, f_{vv}, f_{uu}) \langle f_u, f_{vv} \rangle}{\|f_u\|^2 \|f_u \times f_{vv}\|^2}(u, 0). \quad (2.3)$$

$\kappa_s, \kappa_\nu, \kappa_c$ をそれぞれ特異曲率、極限法曲率、カスプ的曲率という。また、 κ_t は cusp-directional torsion と呼ばれる不変量である。特異曲率 κ_s はカスプ辺の内的不変量であることに注意する。さらに、これらの不変量は第一種特異点を持つフロントルに対しても定義でき、 κ_ν は余階数が 1 の特異点を持つフロントルに対しても定義できる ([14])。

事実 2.3 ([14]). $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ をフロントル、 p を第一種特異点とする。このとき、 f が p で波面であるための必要十分条件は、 $\kappa_c(p) \neq 0$ が成り立つことである。

このことから、上の状況において、 κ_c は特異曲線上で常に正または常に負の値をとることがわかる。

次に、波面 $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対して、 $p \in U$ が第二種特異点であるとする。正則点の集合 $U \setminus \{v = 0\}$ 上で定義された平均曲率を H と表す。このとき、 H は p の近傍で非有界になることが知られているが、 $\hat{H} = vH$ とおくと、 \hat{H} は U 上で定義された C^∞ 関数であることがわかる ([14])。そこで、この \hat{H} を用いて、

$$\mu_c(p) = 2\hat{H}(p) \quad (2.4)$$

と定める。 $\mu_c(p)$ は正規化されたカスプ的曲率と呼ばれる不変量である ([14])。次のことが知られている。

事実 2.4 ([14, Proposition 3.2]). $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ をフロントル、 p を第二種特異点とする。このとき、 f が p で波面であるための必要十分条件は、 $\mu_c(p) \neq 0$ が成り立つことである。

したがって、 f が p で波面のとき、 $\mu_c(p) > 0$ または $\mu_c(p) < 0$ である。

3 主曲率, 主方向ベクトル, 峰点

3.1 主曲率関数の有界性

ここでは、波面の主曲率関数の挙動について得られた結果を述べる。

$f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in V$ を非退化特異点とする. K, H で波面 f の Gauss 曲率と平均曲率を表す. これらは, $V \setminus S(f)$ で有界な C^∞ 関数である. そこで, 関数 $\kappa_j : V \setminus S(f) \rightarrow \mathbf{R}$ ($j = 1, 2$) を

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (3.1)$$

と定める. 定義から, $\kappa_1 \kappa_2 = K$, $\kappa_1 + \kappa_2 = 2H$ なので, これらは正則点の集合上で定義された主曲率関数である. このとき, 次の結果を得る.

定理 3.1 ([26, Theorem 3.1]). $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, p を非退化特異点とする.

(1) p がカスプ辺のとき.

- $\eta\lambda > 0$ が特異曲線上で成り立つとする. このとき, $\kappa_c > 0$ ならば, κ_2 が p で有界な C^∞ 関数となる. さらに, $\kappa_2(p) = \kappa_\nu(p)$ が成り立つ.
- $\eta\lambda < 0$ が特異曲線上で成り立つとする. このとき, $\kappa_c < 0$ ならば, κ_2 が p で有界な C^∞ 関数となる. さらに, $\kappa_2(p) = \kappa_\nu(p)$ が成り立つ.

(2) p が第二種特異点のとき, $\mu_c > 0$ ならば, κ_2 が p で有界な C^∞ 関数となる. さらに, p が許容的ならば $\kappa_2(p) = \kappa_\nu(p)$ が成り立つ.

逆の主張も成り立つ. また, κ_2 が有界のとき, κ_1 は p で非有界となる.

以下では $\kappa = \kappa_2$ が定義域において有界な C^∞ 関数であると仮定する. このとき, $\hat{\kappa} = \lambda\kappa_1$ も定義域上有界な C^∞ 関数であることに注意する. κ が有界な C^∞ 関数なので, κ に対応する主方向ベクトル v が定義できる ([25, 26]). ここで, ベクトル $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ が κ に関する主方向ベクトルであるとは, $(II - \kappa I)v = \mathbf{0}$ を満たすときをいう. ただし,

$$I = \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_v \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} -\langle f_u, \nu_u \rangle & -\langle f_u, \nu_v \rangle \\ -\langle f_v, \nu_u \rangle & -\langle f_v, \nu_v \rangle \end{pmatrix}$$

である.

定義 3.2. 上の状況で, 点 p が峰点であるとは, $v\kappa(p) \neq 0$ となるときをいう. また, p が k 次の峰点であるとは, $v^{(m)}\kappa(p) = 0$ ($1 \leq m \leq k$), $v^{(k+1)}\kappa(p) \neq 0$ となるときをいう.

峰点は, Porteous によってはじめて詳細な研究が行われた ([17, 18]). 峰点については [2, 5, 6, 8] などとも参照.

4 波面の平行曲面

主曲率関数の挙動の応用として, ここでは波面の平行曲面について得られた結果を紹介する.

$f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を単位法ベクトル, $p \in V$ を非退化特異点とする. このとき, $\kappa = \kappa_2$ が V 上零でない C^∞ 関数とする. 波面 f の平行曲面 $f^t : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $f^t = f + t\nu$ とする. ただし, $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ は定数. 平行曲面 f^t はまた波面になることに注意する.

Weingarten の公式を使うことにより, 符号付き面積密度関数 $\lambda^t : V \rightarrow \mathbf{R}$ は,

$$\lambda^t = (1 - t\kappa)(\lambda - t\hat{\kappa})$$

と表せる. ただし, $\hat{\kappa} = \lambda\kappa_1$ である. $\hat{\kappa}(p) \neq 0$ であるので, p が f^t の特異点であるための必要十分条件は $t = 1/\kappa(p)$ が成り立つことである. また, $S(f^t) = \{(u, v) \in V \mid \kappa(u, v) - \kappa(p) = 0\}$ が成り立ち,

$\hat{\lambda}^t = \kappa(u, v) - \kappa(p)$ を符号付き面積密度関数ととることができる. 退化ベクトル場を η^t とすると, $\eta^t = v$ が成り立つ. ここで, v は κ に関する主方向ベクトルである.

これらを用いることによって, 次の結果を得る.

定理 4.1 ([26, Theorem 4.2]). $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を単位法ベクトル, p を非退化特異点とする. V 上有界な C^∞ 関数となる f の主曲率関数を κ とし, v を κ に関する主方向ベクトルとする. このとき, 平行曲面 f^t ($t = 1/\kappa(p)$) について次が成り立つ.

- (1) p が κ の正則点, つまり, $d\kappa(p) \neq 0$ のとき.
 - f^t が p でカスプ辺をもつための必要十分条件は, p が f の峰点でないことである.
 - f^t が p でツバメの尾をもつための必要十分条件は, p が f の 1 次の峰点であることである.
 - f^t が p でカスプ的蝶をもつための必要十分条件は, p が f の 2 次の峰点であることである.
- (2) p が κ の臨界点, つまり, $d\kappa(p) = 0$ のとき.
 - f^t が p でカスプの唇を持つための必要十分条件は, $\det \text{Hess } \kappa(p) > 0$ となることである.
 - f^t が p でカスプ的嘴を持つための必要十分条件は, p が f の 1 次の峰点であり, $\det \text{Hess } \kappa(p) < 0$ となることである.

5 波面の焦曲面

波面の焦曲面について得られた結果を紹介する.

$f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を単位法ベクトル, p を非退化特異点とする. $\kappa = \kappa_2$ が V 上有界な C^∞ 関数となると仮定する. このとき, 次の写像を考える.

$$\mathcal{F} : V \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \mathcal{F}(u, v, w) = f(u, v) + w\nu(u, v).$$

写像 \mathcal{F} の特異点集合の像が f の焦曲面である.

\mathcal{F} の Jacobi 行列式 $\det J_{\mathcal{F}}$ を考えると,

$$\det J_{\mathcal{F}} = (1 - w\kappa)(\lambda - w\hat{\kappa})$$

となるので, \mathcal{F} の特異点集合 $S(\mathcal{F})$ は,

$$S(\mathcal{F}) = \{(u, v, w) \in V \times \mathbf{R} \mid w = 1/\kappa(u, v)\} \cup \{(u, v, w) \in V \times \mathbf{R} \mid w = \lambda(u, v)/\hat{\kappa}(u, v)\}$$

と表せる. ここで,

$$FC = f + \frac{1}{\kappa}\nu, \quad \widehat{FC} = f + \frac{\lambda}{\hat{\kappa}}\nu$$

とおくと, FC, \widehat{FC} はそれぞれ $S(\mathcal{F})$ の像に一致する. したがって, FC, \widehat{FC} は f の焦曲面である ([3, Proposition 4.4]).

FC に対して, 次のことを得る.

定理 5.1 ([27]). $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を単位法ベクトル, p を非退化特異点とする. このとき, 焦曲面 FC に対して, 次が成り立つ.

- FC が点 p で正則となるための必要十分条件は, p が f の峰点でないことである.

- FC が点 p でカスプ辺をもつための必要十分条件は, p が 1 次の峰点であることである.
- FC が点 p でツバメの尾をもつための必要十分条件は, p が 2 次の峰点であり, p を通る峰点の集合 (峰線) が正則曲線となることである.

この定理の証明は, 波面の A 型特異点と同次元間の Morin 写像の特異点との関係 ([21, Corollary 2.11]) を用いることによって得られる.

次に, \widehat{FC} について考える. 定義から, f の特異曲線上に制限すると $\widehat{FC} = f$ となることがわかる.

p をカスプ辺とする. このとき, \widehat{FC} は p で (さらに, f の特異曲線に沿って) 正則となることに注意する. $K_{\widehat{FC}}, H_{\widehat{FC}}$ を \widehat{FC} の Gauss 曲率, 平均曲率とする.

定理 5.2 ([27]). $K_{\widehat{FC}}, H_{\widehat{FC}}$ は f の特異曲線上,

$$K_{\widehat{FC}_f} = -\frac{1}{4}(4\kappa_t^2 + \kappa_s\kappa_c^2), \quad H_{\widehat{FC}_f} = \pm\frac{1}{8}(\kappa_c^2 - 4\kappa_s)$$

と表せる. ただし, \pm は \widehat{FC} の単位法ベクトルの向きに依存する.

$\kappa_s, \kappa_c, \kappa_t$ は (2.1), (2.2), (2.3) で定まるカスプ辺の不変量である.

p をツバメの尾とする. このとき, \widehat{FC} に対して次が成り立つ.

定理 5.3 ([27]). $f: V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, p をツバメの尾とする. このとき, \widehat{FC} は点 p でカスプ辺をもつ.

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Vol.1, Monographs in Mathematics **82**, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, *Families of surfaces: focal sets, ridges and umbilics*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **125** (1999), 243-268.
- [3] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser Basel, 1992.
- [4] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827-848.
- [5] T. Fukui and M. Hasegawa, *Singularities of parallel surfaces*, Tohoku Math. J. **64** (2012), 387-408.
- [6] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella – a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35-67.
- [7] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26**, No. 4 (2015), 34pp.
- [8] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.
- [9] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and “flat” spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92-127. MR2763021
- [10] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789-849.

- [11] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [12] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), 265–299.
- [13] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*. Canad. J. Math. **68** (2016), 445–462.
- [14] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, 247–281, Springer Proc. Math. Stat. **154**, Springer, Shanghai, 2016.
- [15] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Differential Geom. **221** (2005), 303–351.
- [16] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. **68** (2016), 73–90.
- [17] I. R. Porteous, *The normal singularities of submanifold*, J. Differential Geom. **5** (1971), 543–564.
- [18] I. R. Porteous, *Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces*, second edition, Cambridge University Press, 2001.
- [19] K. Saji, *Criteria for D_4 singularities of wave fronts*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 137–147.
- [20] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, Kyushu J. Math. **62** (2008), 259–280.
- [21] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [22] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.
- [23] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka Math. J. **47** (2010), 591–607.
- [24] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Differential Geom. Appl. **30** (2012), 285–299.
- [25] K. Teramoto, *Parallel and dual surfaces of cuspidal edges*, Differential Geom. Appl. **44** (2016), 52–62.
- [26] K. Teramoto, *Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts*, submitted.
- [27] K. Teramoto, *Focal surfaces of wave fronts*, preprint, 2016.