

# earthquake 変形を与える measured geodesic lamination の計算

三口 雄大 (Katsuhiko MIGUCHI) (大阪大学大学院理学研究科数学専攻)

## 1 導入

$S = \Sigma_{g,n}$  を種数  $g$ , 穴の数  $n$  の向き付け可能で連結な曲面とし,  $S$  に双曲計量が入るための条件  $2g - 2 + n > 0$  を仮定する.  $S$  の穴は, 与えられた双曲計量により尖点または閉測地線境界になっているとする.  $\mathcal{T}_{g,n}$  で  $S$  に入る標識付き双曲構造の空間である Teichmüller 空間を表わす.

$S$  上の測度付き測地線ラミネーションに対して, 地震変形と呼ばれる  $\mathcal{T}_{g,n}$  上の変換を構成することができる. Bonsante-Krasnov-Schlenker[1] は  $\mathcal{T}_{g,n}$  の任意の 2 点に対して, その間に地震変形が存在することを示した. これは, 閉曲面の場合の Thurston の地震変形定理の穴のある曲面への一般化である.

簡単な曲面の場合は, いくつかの測地線の長さで双曲構造のパラメータをとったとき, 地震変形定理の条件をみたす測度付き測地線ラミネーションを方程式を解くことにより具体的に求めることができる. 本稿では, その考察に必要な剪断座標と測地線長さによる座標の対応について,  $\Sigma_{0,3}$  と  $\Sigma_{1,1}$  の場合で得られた結果を紹介する.

## 2 準備

$S$  の境界と横断的に交わらない単純測地線の直和で表わされる  $S$  の閉集合  $\lambda$  を  $S$  上の測地線ラミネーションといい,  $\lambda$  の弧状連結成分を葉という.  $S$  上の測地線ラミネーション  $\lambda$  は,  $S$  上の測地線ラミネーション全体に入る包含関係の順序について極大であるとき, 極大であるという.  $\lambda$  の葉  $l$  上の任意の点  $p$  に対して,  $p$  の近傍  $U$  が存在して,  $U \cap l$  の連結成分が 1 つとなるとき,  $l$  は孤立しているという.

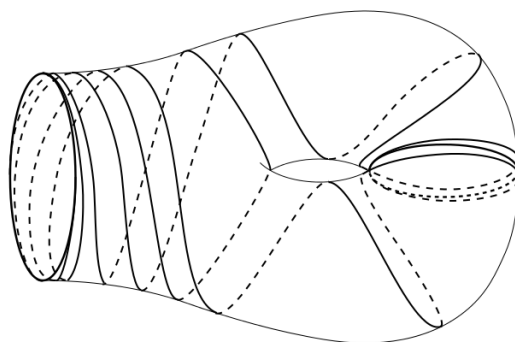


図 1:  $\Sigma_{1,1}$  上の極大な測地線ラミネーションの例

$S$  上の極大な測地線ラミネーション  $\lambda$  は  $S$  の双曲理想三角形分解を与えているとみなすことができる. このような  $\lambda$  を 1 つ固定したとき, Bonahon[2] によって剪断座標と呼ばれる  $\mathcal{T}_{g,n}$  の座標が構成された. これは,  $\lambda$  で与えられた双曲理想三角形の貼り合わせが各葉においてどれだけずれているか, というものを  $\lambda$  と横断的な  $S$  上の弧の符号付き測度によって表示したものである.

孤立している葉でのずれを表わす実数値を剪断重みといい,  $\lambda$  の任意の葉が孤立しているときには, 各葉の剪断重みによって  $\mathcal{T}_{g,n}$  のパラメータ付けができる. 本稿では, 以下, 測地線ラミネーションは極大で任意の葉が孤立していると仮定する.  $S$  の境界成分は測地線ラミネーションの葉となるが, その剪断重みは 0 とみなせるので, 特に断りのない場合には境界成分は葉に含めない.

### 3 $\Sigma_{0,3}$ での剪断座標と測地線長さによる座標の対応

#### 3.1 境界へ向かう葉の剪断重みと境界の長さ

まず, 一般的な曲面  $S$  で成り立つ,  $S$  の境界成分へ向かう測地線ラミネーションの葉の剪断重みとその境界成分の長さに関する補題を紹介する.

**補題 1.**  $\lambda$  を  $S$  の測地線ラミネーションとし, 葉  $l$  の剪断重みを  $w_l$  で表わす.  $S$  の境界成分  $\gamma$  に対して,  $\gamma$  の任意の近傍と共通部分をもつ端をもつ  $\lambda$  の葉全体を  $\lambda_\gamma$  と表わしたとき, 次が成り立つ:

$$\text{length}(\gamma) = \left| \sum_{l \in \lambda_\gamma} w_l \right|$$

また,  $S$  の尖点  $C$  に対して,  $C$  の任意の近傍と共通部分をもつ端をもつ  $\lambda$  の葉全体を  $\lambda_C$  と表わしたとき, 次が成り立つ:

$$\sum_{l \in \lambda_C} w_l = 0$$

ただし, 上の等式において, 葉  $l$  の両端が  $\gamma$  や  $C$  と共通部分をもつ場合は,  $\lambda_\gamma$  や  $\lambda_C$  に  $l$  が 2 度あらわれるものとする.

#### 3.2 剪断座標と測地線長さによる座標の対応

$S = \Sigma_{0,3}$  とする. このとき,  $S$  の双曲構造は境界 3 つの長さによって決定されるので, 剪断座標と測地線長さによる座標の対応を具体的に表示することが可能である.

**補題 2.**  $S$  の境界成分を  $\{\gamma_i\}_{i=1,2,3}$  とすると,  $S$  上の測地線ラミネーションは  $(|\gamma_i|)_{i=1,2,3} = (2, 2, 2), (4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4)$  のいずれかである. ただし, 境界成分に葉が巻きつく向きを意識すると,  $2^3$  倍の種類が存在する.

**定理 3.** 上の補題から, 高々有限種類である  $S$  上の測地線ラミネーションそれぞれについて, 剪断座標と測地線長さによる座標の対応を具体的に記述できる.

## 4 $\Sigma_{1,1}$ での剪断座標と測地線長さによる座標の対応

### 4.1 単純閉測地線のコードと長さ

まず, 一般的な曲面  $S$  で成り立つ,  $S$  上の単純閉曲線の測地線ラミネーションとの交わり方とその測地線の長さに関する補題を紹介する.

$S$  上の単純閉曲線  $\gamma$  が測地線ラミネーション  $\lambda$  と有限個の点で交わっているとき, 次の値を考える.

- $\gamma$  交わる  $\lambda$  の葉に与えられている剪断重み
- $\gamma$  が  $S \setminus \lambda$  の成分である双曲理想三角形の中で曲がる方向 (左なら 1, 右なら -1)

$\gamma$  上の点  $p$  と向きを 1 つ与えて,  $p$  から  $\gamma$  に沿って進んだときの値を並べたものを  $\gamma$  の  $\lambda$  と交わるコードという.

**補題 4.**  $S$  上の単純閉測地線  $\gamma$  がコード  $C = w_1, \varepsilon_1, \dots, w_n, \varepsilon_n$  で測地線ラミネーション  $\lambda$  と交わるとき,  $\gamma$  に対応する Fuchs 群の双曲元は次で与えられる:

$$A(C) = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}w_i} & \frac{1+\varepsilon_i}{2}e^{\frac{1}{2}w_i} \\ \frac{1-\varepsilon_i}{2}e^{-\frac{1}{2}w_i} & e^{-\frac{1}{2}w_i} \end{pmatrix}$$

単純閉測地線は対応する Fuchs 群の双曲元のトレースから長さを計算することができるので, 測地線ラミネーションが与えられたとき交わるコードが求められれば, 長さがわかる.

### 4.2 剪断座標と測地線長さによる座標の対応

$S = \Sigma_{1,1}$  とする. このとき,  $S$  上の測地線ラミネーションは線分 3 つの傾きによって表示することができ, その表示から単純閉測地線との交わるコードを求めることができるので, 剪断座標と測地線長さによる座標の対応を具体的に表示することが可能である.

$S$  の極大 Abelian 被覆は  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  で表わされ, 格子点集合  $\mathbb{Z}^2$  は  $S$  の穴の持ち上げに対応している.  $S$  上の測地線ラミネーション  $\lambda$  は 3 つの葉から成り, それらの両端は  $\Sigma_{1,1}$  の穴に向かうので,  $\mathbb{Z}^2$  の 2 点を結ぶ  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  上の線分に持ち上がる. 原点を一端にもつような持ち上げをとったとき, もう一端の座標によって葉をパラメータ付けることができる.

**補題 5.**  $S$  上の測地線ラミネーション全体  $\mathcal{L}$  は次のような表示をもつ:

$$\mathcal{L} = \left\{ \left\{ \begin{matrix} p_i \\ q_i \end{matrix} \right\}_{i=1,2,3} \mid p_i, q_i \in \mathbb{Z}, \frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, |p_i q_j - q_i p_j| = 1 \right\}$$

ただし, 境界成分に葉が巻きつく向きを意識すると, 2 倍の種類が存在する.

葉  $l_1, l_2, l_3$  の剪断重みをそれぞれ  $w_1, w_2, w_3$  とする. 測地線長さによる座標を求めるには, 被覆  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  上で傾き  $0, \infty, 1$  の直線を持ち上げにもつ 3 つの単純閉測地線の  $\lambda \in \mathcal{L}$  と交わるコードを求めればよい.

$\lambda = (p_i/q_i)_{i=1,2,3}$  を標準的な位置  $\lambda_0 = (0/1, 1/1, 1/0)$  にうつす変換は,  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  の行列を  $\lambda$  の各成分に左からかける作用として, 次で与えられる:

$$M = \begin{bmatrix} q_1 & -p_1 \\ q_3 & -p_3 \end{bmatrix} : \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} \right) \mapsto \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0} \right)$$

したがって, 傾き  $p_0/q_0$  の直線の  $M$  による像である傾き  $p/q = (p_0q_1 - q_0p_1)/(p_0q_3 - q_0p_3)$  の直線が  $\lambda_0$  とどのようなコードで交わっているか調べればよい.

**補題 6.** 傾き  $p/q$  の直線を持ち上げにもつ単純閉測地線は, 標準的な位置にある測地線ラミネーション  $\lambda_0$  とコード  $C(p/q) = c_1, \dots, c_n$  で交わる. ただし,

$$\begin{cases} n = q, \delta = 1 & (|p/q| \leq 1) \\ n = p, \delta = -1 & (|p/q| \geq 1) \end{cases}$$

$$\eta_i = \lfloor (p/q)^\delta i \rfloor - \lfloor (p/q)^\delta (i-1) \rfloor \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{ は切り捨て関数})$$

$$c_i = \begin{cases} w_{2+\delta}, -\delta, w_2, \delta & (\eta_i = 0) \\ w_{2+\delta}, \delta, w_{2-\delta}, -\delta & (\eta_i = 1) \\ w_{2+\delta}, -\delta, w_2, -\delta, w_{2-\delta}, \delta, w_2, \delta & (\eta_i = -1) \end{cases}$$

上の補題から,  $\mathcal{L}$  の元で表わされる  $S$  上の測地線ラミネーションそれぞれについて, 剪断座標と測地線長さによる座標の対応を具体的に記述できる.

**定理 7.** 測地線ラミネーション  $\lambda = (p_i/q_i)_{i=1,2,3}$  による剪断座標が  $(w_i)_{i=1,2,3}$  のとき, 測地線長さによる座標は次で与えられる:

$$(2 \cosh^{-1} \frac{1}{2} \text{tr} A(C(p_1/p_3)), 2 \cosh^{-1} \frac{1}{2} \text{tr} A(C(q_1/q_3)), 2 \cosh^{-1} \frac{1}{2} \text{tr} A(C((q_1-p_1)/(q_3-p_3))))$$

## 参考文献

- [1] Francesco Bonsante, Kirill Krasnov, Jean-Marc Schlenker : Multi-black holes and earthquakes on Riemann surfaces with boundaries, International Mathematics Research Notices, (2011), No. 3, 487-552
- [2] Francis Bonahon : Shearing hyperbolic surface, bending pleated surfaces and Thurston's symplectic form, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série, tome 5, n<sup>o</sup>2(1996), 233-297.