# Willmore型超曲面の剛性 *

中村 謙太 (Kenta NAKAMURA) †

## 1　序

$\Sigma$ を境界のないコンパクトで向きづけ可能，連結な 2 次元多様体とし，$X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ をはめこみとする．$X$ の平均曲率 $H$ の 2 乗の積分 $\widetilde{W}(X) := \int_\Sigma H^2\, d\Sigma$ を Willmore エネルギー（または Willmore 汎関数）とよぶ．この量は弾性膜の曲げエネルギーを表す．また，医療の分野にも深く関わりがあり，今日に至るまで数多くの研究がなされてきた．Willmore 曲面とは Willmore エネルギー $\widetilde{W}$ の臨界点，すなわち $\Delta_\Sigma H + \|B\|^2 H + 4H^3 = 0$ をみたす曲面のことをいう．ただし，$\Delta_\Sigma$ は $X$ により $\Sigma$ 上に誘導される Laplace-Beltrami 作用素で，$\|B\|^2$ は，$X$ の第 2 基本形式 $B$ の平方ノルムを表す．Willmore は自身の論文 [W65] において，Willmore エネルギーの下からの評価を与え，その最小値をとるのは $X$ が標準球面のみであることを示した．さらに，2012 年に Marques-Neves によって解かれた Willmore 予想：「$\Sigma$ が種数 1 の曲面のとき，はめこみ $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対する不等式 $\widetilde{W}(X) \geq 2\pi^2$ が成り立ち，等号成立は $X(\Sigma)$ が Clifford トーラス $\mathbb{S}^1(\frac{1}{2}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{2})$ の立体射影による像のときである」は，多くの数学者を魅了した．Willmore 曲面については研究が盛んにされており，数多くのことが知られている．

一方，T. Lamm-J. Metzger が論文 [LM11],[LMS10] で導入した Willmore 型曲面については，まだ十分な研究がなされているとは言えない．3 次元 Riemann 多様体 $M$ にはめこまれた閉曲面 $\Sigma$ (すなわち，境界のないコンパクトな曲面) が Willmore 型曲面であるとは，曲面積一定の下での Willmore エネルギー $W = \dfrac{1}{2}\int_\Sigma H^2\, d\Sigma$ の臨界点となる曲面のことである．このような曲面の例として，N. Ikoma -A. Malchiodi -A.Mondino の論文 [IMM14] では，小さな曲面積をもつ Willmore 型トーラス (すなわち，種数 1 の Willmore 型曲面) が全空間である Riemann 多様体 $M$ のリッチ曲率とスカラー曲率に適切な仮定の下での存在性を示した．本研究では，多様体の次元を一般次元の $n$ に上げて，全空間 $M$ を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ に設定し，$\mathbb{R}^{n+1}$ にはめこまれた閉超曲面 $\Sigma^n$ に対する Willmore 型超曲面という概念を新しく導入した．ここで，$C^{3+\alpha}$ 級 $(0 < \alpha < 1)$ はめこみ $X : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が $\lambda_0$-**Willmore 型超曲面**であるとは，体積一定の下で，$\Delta_\Sigma H + \|B\|^2 H - \dfrac{1}{2} H^3 = \lambda_0 H$ をみたすことを言う．2 節で Willmore 型超曲面について，3 節では得られた結果について述べる．

---

*第 13 回 数学総合若手研究集会 (2017 年 2 月 27 日–3 月 2 日, 於 北海道大学)

†九州大学大学院数理学府　博士課程 1 年

## 2 Willmore 型超曲面とは

$X:\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ をはめこみとし，$V(X) := \int_\Sigma d\Sigma$ で $\Sigma$ の $n$ 次元体積を表す．ここで $d\Sigma$ は体積要素である．次に $\nu$ を $X$ の単位法ベクトル場，$\{k_i\}_{i=1}^n$ を $X$ の主曲率で，$H := k_1+\cdots+k_n$ を平均曲率とする．また，$\|B\|^2 := k_1^2+\cdots+k_n^2$ を第二基本形式の長さとし，汎関数 $W(X) := \dfrac{1}{2}\int_\Sigma H^2\,d\Sigma$ を **Willmore エネルギー**とする．

**定義 2.1.** $X:\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が $\lambda$-Willmore 型超曲面であるとは，ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$LH - \frac{1}{2}H^3 = \lambda H \tag{$\star$}$$

が成り立つことをいう．

**Remark 2.2.** 特に，$n=2$ の場合 $W(X)$ は相似変換に関して不変である．この性質は $n \neq 2$ であるときは成り立たず，大きく性質が異なる点である．また，$\{X_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ を体積を保つ $X$ の $C^\infty$ 級法変分で，$u := \left\langle \dfrac{\partial}{\partial t}X_t\Big|_{t=0}, \nu \right\rangle$ とし，$\delta W := \partial_t W(X_t)$ と書く (ここに $\langle\, ,\, \rangle$ は Euclid 内積を表す) と，($\star$) は体積を保つ変分に対して $\delta W = 0$ となることと同値である．また，($\star$) は (体積を保つとは限らない) 変分に対して $\delta(W-\lambda V) = 0$ となることと同値である．

**例 2.3.** $\mathbb{S}^n(r) := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = r\right\}$ とし，$X(\Sigma)$ が標準球面，すなわち $X(\Sigma) = \mathbb{S}^n(r)$ の場合を考える．このとき，外向き単位法ベクトルに対する平均曲率 $H$ は $H = -n/r$ であり，$\|B\|^2 = n/r^2$ であるから，$X$ は $\frac{n}{2r^2}(2-n)$-Willmore 型超曲面である．

**Remark 2.4.** 定義 2.1 で $n=2$ かつ $\lambda=0$ の場合，特に $X$ は **Willmore 曲面**とよばれる．Willmore 曲面は Willmore エネルギー $W$ の臨界点となっていて，方程式 $LH - \dfrac{1}{2}H^3 = 0$ は

$$\Delta H + \frac{1}{2}(H^2 - 4K)H = 0 \tag{2.1}$$

と同値である．ここに，$K = k_1k_2$ は $X$ の Gauss 曲率である．上の例 2.7 で見たように，$\mathbb{S}^2$ は Willmore 曲面であり，Willmore エネルギーは $\mathscr{W}(\mathbb{S}^2) = 8\pi$ となるが，Willmore はこの値は $\mathbb{R}^3$ 内にはめこまれた閉曲面 $\Sigma$ に対する $W(\Sigma)$ の最小値となっていることと，最小値 $8\pi$ を達成する閉曲面は標準球面であることを示した ([W65], cf.[A10])．

**Remark 2.5.** はめこみ $X:\Sigma^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が極小曲面の場合は方程式 (2.1) をみたし，Willmore エネルギーは 0 である．ただしここでは $\Sigma^2$ はコンパクトで境界がないと仮定しており，$\mathbb{R}^3$ 内の境界のないコンパクトな極小曲面は存在しないので，$X$ が極小曲面の場合は自動的に除外される．一方，$\mathbb{S}^3$ 内の極小曲面は立体射影を通して $\mathbb{R}^3$ 内の Willmore 曲面になることが知られている (cf.[A10])．

**Remark 2.6.** 1 次元 Willmore 型超曲面について述べておく．これは弾性曲線 (elastic curve) と呼ばれており，Langer-Singer( [LS85]) によって，弾性曲線は完全に分類されている：

弾性曲線は (曲線の多重性を除いて) 円 $\mathbb{S}^1(r)$ または 8 の字曲線 (figure eight) に限る．

Willmore 型超曲面は，弾性曲線の高次元への一般化でもある．今度は Wilmore 型超曲面を変分的な観点から見てみよう．以下の 3 つの変分問題 (VP1)-(VP3) を考える．

(VP1) 体積を保つ $X$ の任意の変分 $X_t$ に対し，$\delta W = 0$.

(VP2) ある定数 $\mu \in \mathbb{R}$ が存在して，$X$ の任意の変分 $X_t$ に対し，$\delta(W - \mu V) = 0$

(VP3) $X$ の任意の変分 $X_t$ に対し，$\delta W = 0$.

このとき，次が成り立つ．

**命題 2.7.** (1) $X$ が (VP1) の解 i.e., $LH - \frac{1}{2}H^3 = 0 \iff X$ が (VP2) の解 i.e., $LH - \frac{1}{2}H^3 = \mu H$

(2) $n = 2$ のとき，$X$ が (VP1) の解 i.e., $LH - \frac{1}{2}H^3 = 0 \iff X$ が (VP3) の解 i.e., $\lambda = 0$

したがって，$n = 2$ のときは (VP1) から (VP3) はすべて同値になり，$\mathbb{R}^3$ 内では Willmore 型曲面と Willmore 曲面の概念は同値であることを意味する．さて，以下では $X : \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ は $C^{5+\alpha}$ 級 Willmore 型超曲面とする．このとき $W$ の第二変分をとると，以下のようになる：
$Lu := \Delta u + \|B\|^2 u$ および,

$$\widetilde{L}u := L^2u - \frac{3}{2}H^2 Lu - Hg(\nabla H, \nabla u) + 2h(\nabla u, \nabla H) + 2\langle B \mid \mathrm{Hess}_u \rangle H \\ + \left( |\nabla H|^2 + 2\langle B \mid \mathrm{Hess}_H \rangle + 2\mathrm{Tr}(B^3)H \right) u \tag{2.2}$$

(ただし，記号 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は行列 $A, B$ に対し $\langle A \mid B \rangle := \mathrm{Trace}(AB)$ を表す) に対し，$K_\lambda u := \widetilde{L}u - \lambda Lu$ とおくと，$W$ の第二変分は

$$\delta^2 W := \partial_t^2 W(X_t)\big|_{t=0} = \int_\Sigma u K_\lambda u \, d\Sigma \tag{2.3}$$

と計算される (**第二変分公式**)．ここに，$K_\lambda = \widetilde{L} - \lambda L : C^{4+\alpha}(\Sigma) \to C^{0+\alpha}(\Sigma)$ は 4 階線形楕円型作用素で，$L^2$ の意味で自己共役，すなわち

$$\int_\Sigma v K_\lambda u \, d\Sigma = \int_\Sigma u K_\lambda v d\Sigma \quad \text{for} \quad u, v \in C^{4+\alpha}(\Sigma).$$

をみたす ([LM11])．ここで $C^{k+\alpha}(\Sigma)$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) は $\Sigma$ 上の $C^{k+\alpha}$ 級関数全体を表す．このとき，Willmore 型超曲面の安定性を以下で定義する：

**定義 2.8.** $C^{5+\alpha}$ 級はめこみ $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が指数 $\lambda$ の Willmore 型超曲面であるとき，$X$ が**安定** (stable) であるとは，$X$ の体積を保つ任意の変分 $\{X_t\}$ に対し，

$$\delta^2 W \geq 0$$

が成り立つことをいう．

このとき，以下が成り立つ：

**命題 2.9.** $X:\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を $C^{5+\alpha}$ 級 $\lambda$-Willmore 型超曲面とし，$\mathcal{F} := \left\{ \varphi \in C^{4+\alpha}(\Sigma) \;\middle|\; \int_\Sigma H\varphi \, d\Sigma = 0 \right\}$ および $I[u] := \int_\Sigma u K_\lambda u \, d\Sigma$ とおくとき，次の (i)(ii) は同値である．

(i) $X$ は安定である．

(ii) 任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し $I[u] \geq 0$ である．

**Remark 2.10.** 安定な Willmore 型超曲面の例として標準球面 $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ がある．また $n=2$ の場合だと回転トーラス

$$X(u,v) = \Big( (\sqrt{2} + \cos u)\cos v,\, (\sqrt{2} + \cos u)\sin v,\, \sin u \Big), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi$$

が安定な Willmore 曲面である ([MN12])．

## 3　主結果

この節では得られた主結果について述べる．高次元の Willmore 型超曲面の具体例の構成は非常に難しく，著者も今のところ標準球面以外の例は見つけられていないが，(2.2) で定義される第二変分に付随する 4 階線形楕円型作用素 $K_\lambda$ に適切な仮定をおくと，はじめに $C^{5+\alpha}$ 級 Willmore 型超曲面 $X$ を与えて摂動させたときに，合同を除くと ($n=2$ のときは相似も除く)$X$ の十分小さな $C^{4+\alpha}$ 近傍には Willmore 型超曲面は $X$ 以外には存在しないという，非存在については分かった．それが次である：

**定理 3.1.** $n \neq 2$ とし，$X$ を $C^{5+\alpha}$ 級 $\lambda_0$-Willmore 型超曲面とする．(2.2) で定義される第二変分に付随する 4 階線形楕円型作用素 $K_\lambda$ は非自明な零固有値を持たないと仮定する．ここで自明な零固有値とは，$\mathbb{R}^{n+1}$ の合同 (平行移動・回転) から誘導される変分の法線方向の成分を固有関数にもつ固有値のことである．このとき，$\mathbb{R}^{n+1}$ の合同を除いて，$X$ の十分小さな $C^{4+\alpha}$ 近傍には Willmore 型超曲面は $X$ 以外には存在しない．

**定理 3.2.** $n = 2$ とし，$X$ を $C^{5+\alpha}$ 級 Willmore 曲面とする．(2.2) で定義される第二変分に付随する 4 階線形楕円型作用素 $K_\lambda$ は非自明な零固有値を持たないと仮定する．このとき，$\mathbb{R}^{n+1}$ の合同と相似を除いて，$X$ の十分小さな $C^{4+\alpha}$ 近傍には Willmore 曲面は $X$ 以外には存在しない．

この二つの定理の証明のアイデアを少しだけ述べる．$n \neq 2$ のときと $n = 2$ のときは概ね同じであるので，$n \neq 2$ の場合を述べる．$V := \{ u \in C^{4+\alpha}(\Sigma) \mid X + u\nu$ ：はめ込み $\}$ とし，$u \in V$ に対して写像 $\Phi : V \times \mathbb{R} \to C^{0+\alpha}(\Sigma)$ を

$$\Phi(u,\lambda) := L_u H u - \frac{1}{2} H_u^3 - \lambda H_u, \quad L_u := \Delta_u + \|B_u\|^2,$$

で定義する．$\Delta_u$ と $\|B_u\|^2$ はそれぞれ $X+u\nu$ により誘導されるラプラシアン，第二基本形式の長さである．このとき,「$X+u\nu$ が Willmore 型超曲面である $\iff$ ある $u\in V$ が存在して，$\Phi(u,\lambda)=0$」が成り立つ．このように写像 $\Phi$ は Willmore 型超曲面を特徴付ける役割を担う．このアイデアは ([Ko02]) に準ずるものである．$\{e_i\}_{i=1}^N$ を $K_\lambda$ の零固有関数とし，写像 $\Psi : V\times\mathbb{R}\to C^{0+\alpha}(\Sigma)\times\mathbb{R}^{N+1}$ を

$$\Psi(u,\,\lambda) := \left(\Phi(u,\,\lambda),\,\lambda-\lambda_0,\,\int_\Sigma ue_1\,d\Sigma,\cdots,\int_\Sigma ue_N\,d\Sigma\right)$$

で定める．この $\Psi$ に陰関数定理を適用する (よく知られた Banach 空間の陰関数定理は適用できないので，少し変わったタイプの陰関数定理を用いる．正確には $\Psi$ の微分写像 $D_{(u,\lambda)}\Psi(u,\lambda)$ : $C^{4+\alpha}(\Sigma)\times\mathbb{R}\to C^{0+\alpha}(\Sigma)\times\mathbb{R}^{N+1}$ の値域は $K_\lambda$ の零固有空間 $E$ の $L^2$ における直交補空間と $C^{0+\alpha}(\Sigma)\times\mathbb{R}^{N+1}$ の共通部分なので，値域が分裂しているときの陰関数定理 ([La95]) を適用する)．

## 参考文献


[A10] 安藤直也, Willmore 予想および Willmore 曲面について, 山口大学数理科学レクチャーノート No.**1** (2010).

[C84] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry, academic press, London, (1984).

[GT98] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, New York, (1998).

[H99] E. Hebey, Nonlinear analysis on Manifolds : Sobolev spaces and Inequality, American Mathematical Society, New York, (1999).

[IMM14] N. Ikoma, A. Malchiodi, A. Mondino, Embedded area-constrained Willmore tori of small area in Riemannian three-manifolds I:Minimization, `arxiv:1411.4396`.

[Ko02] M. Koiso, Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature, Tohoku Math J.**54** (2002), 145–159.

[La95] S. Lang, Differential and Riemannian Manifolds, Springer-Verlag, GTM**160**, New York, (1995).

[LM11] T. Lamm, J. Metzger, F. Schulze, Foliations of asymptotically flat manifold by surface of Willmore type, Math. Ann. **350**, (2011), 1–78.

[LMS10] T. Lamm, J. Metzger, Small surfaces of Willmore type in Riemannian manifolds, Int. Math. Res. Not.**19** (2010).

[LS85] J. Langer, D. A. Singer, Curve straightening and a minimax argument for closed elastic curves, Topology **24**. (1985), 75–88.

[MN12] F. C. Marques and A. Neves, Min-max theory and the Willmore conjecture, to appear in Annals of Mathematics, `arXiv:1202.6036`.

[W65] T. J. Willmore, Note on embedded surfaces, Ann. Sti. Univ. Iasi, Ia. Mat.**11B**, (1965) 493–496.