円盤上の非同型な高次元Lefschetzファイバー空間について

大場 貴裕　(東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻)*

1. はじめに

Lefschetzファイバー空間はLefschetz型という特異ファイバーを有限個もつ曲面上のファイバー空間である．Lefschetzファイバー空間は様々な幾何学との関わりがある．例えば，Donaldson [2]，Gompf [5] によるシンプレクティック幾何学，Akbulut とOzbagci [1]，Loi とPiergallini [7]，Giroux とPardon [4] らによるStein領域などの研究との関わりが深い．Seidel [11] により，深谷圏やFloer ホモロジーの研究にも用いられている．

筆者は2次元円盤上のLefschetzファイバー空間を用いて，接触多様体のStein充填の研究を行ってきた．ここで，接触多様体のStein充填とはその接触多様体を境界にもつStein領域のことである．Lefschetzファイバー空間がどのようにこの研究に用いられたかの一例を紹介する：Ozbagci とStipsiczは，Lefschetzファイバー空間を用いてStein充填を無限個もつ3次元接触多様体を構成した [9]．Stein充填がLefschetzファイバー空間に付随するStein領域として実現されるのであるが，この際にファイバーである曲面の写像類群の議論が有効に働いている．彼らの結果の高次元版，すなわちStein充填を無限個もつ高次元接触多様体の存在は長い間わかっていなかった．高次元のStein領域もLefschetzファイバー空間から構成されうるが，ファイバーの多様体の次元が高くなり，その写像類群の構造が一般には捉えがたい．筆者は，特別な多様体をファイバーに選ぶことにより，この困難を解決し，Stein充填を無限個もつ高次元接触多様体を構成した [8]．構成には**Lefschetz双ファイバー空間**という高次元Lefschetzファイバー空間をより見易くするための道具を暗に用いている．本稿では，Lefschetz双ファイバー空間について解説し，その後，上記の接触多様体の構成についての概要を報告する．

2. いくつかの準備

2.1. Lefschetzファイバー空間

Lefschetz双ファイバー空間を定義するために，まずはLefschetzファイバー空間の復習をする．$(W, d\lambda)$ を $2n$ 次元のコンパクトな境界付き有向完全シンプレクティック多様体とする．$\mathbb{D}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の中の単位閉円盤とする．$\mathbb{D}^2$ には $\mathbb{C}$ から自然に誘導される向きを入れておく．$f : W \to \mathbb{D}^2$ を滑らかな写像としたときに，$\mathrm{Crit}(f)$，$\mathrm{Critv}(f)$ をそれぞれ f の臨界点，臨界値集合とする．

定義 1. $f : (W, d\lambda) \to \mathbb{D}^2$ が ***Lefschetzファイバー空間***であるとは，f が以下を満たすときをいう：

1. *f は $\mathbb{D}^2 \setminus Critv(f)$ 上ではファイバーが $(W, d\lambda)$ のシンプレクティック部分多様体であるファイバー束；*

2. *$|Crit(f)| < \infty$ かつ $f|_{Crit(f)}$ は単射である；*

本研究は科研費 (課題番号: 15J05214) の助成を受けたものである．

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山２－１２－１
e-mail: oba.t.ac@m.titech.ac.jp

3. 各 $p \in Crit(f)$ と $f(p) \in Critv(f)$ の周りで W と $\mathbb{D}^2$ の向きに適合する複素座標 $(z_1, \ldots, z_n)$，w が存在し，f はこれらの座標を用いて

$$w = f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

と書ける．また，p の近くでシンプレクティック構造 $d\lambda$ は $\mathbb{C}^n$ の標準的な *Kähler* 形式と同一視できているとする．

境界付きの多様体間の写像であるので，境界に対する振る舞いも本来なら定義に入れるべきであるが，ここでは複雑さを回避するため省略する．詳しく知りたい方には，[11, Section (15d)] などを参照してほしい．

定義 2. 二つの *Lefschetz* ファイバー空間 $f_j : (W_j, d\lambda_j) \to \mathbb{D}^2$ $(j = 1, 2)$ が**同型**であるとは，シンプレクティック同型写像 $H : (W_1, d\lambda_1) \to (W_2, d\lambda_2)$ と微分同相写像 $h : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ が存在し，$f \circ H = h \circ f$ を満たすときをいう．

Lefschetz ファイバー空間に関して，幾つかの基本的事項を復習しておく．$f : (W, d\lambda) \to \mathbb{D}^2$ を Lefschetz ファイバー空間とし，$\mathrm{Critv}(f) = \{b_1, \ldots, b_k\}$ とする．基点 $b_0 \in \partial\mathbb{D}^2$ を取り，b_0 から $b_j \in \mathrm{Critv}(f)$ への単純パス δ_j で以下を満たすものをとる (図 1)：$\delta_1, \ldots, \delta_k$ は b_0 でのみ交わる；各 b_j の周りに十分小さい円盤をとり，そこに $\mathbb{D}^2$ から定まる向きを入れる．この円盤と δ_j をつないで得られるループを ℓ_j とするとき，合成 $\ell_1 \cdots \ell_k$ が $\partial\mathbb{D}^2$ にホモトピックになる．この δ_j たちの順序付きの組 $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ を **Hurwitz システム**という．

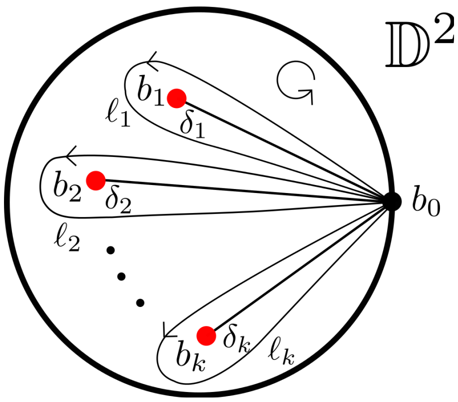

図 1: Hurwitz システム

δ_j 上には，$(W, d\lambda)$ の中の Lagrange n 次元円盤 $\Delta(\delta_j)$ で，$f(\Delta(\delta_j)) = \delta_j$ かつ $f(\partial\Delta(\delta_j)) = b_0$ を満たすものが一意的に定まる．この円盤 $\Delta(\delta_j)$ を δ_j に対する **Lefschetz シンブル**という．また，Lagrange $(n-1)$ 球面である境界 $\partial\Delta(\delta_j) =: V(\delta_j)$ を δ_j に対する**消滅サイクル**という．Lefschetz ファイバー空間の定義により，ループ ℓ_j 上にはシンプレクティックファイバー束が現れる．このファイバー束は，あるシンプレクティック同型写像 φ のアイソトピー類 $[\varphi]$ を用いて

$$\frac{(f^{-1}(b_0), d\lambda|_{f^{-1}(b_0)}) \times [0,1]}{(1, x) \sim (0, \varphi(x))} \to \frac{[0,1]}{1 \sim 0}$$

とみなせる．この $[\varphi]$ を δ_j に対する**モノドロミー**という．Seidel によるシンプレクティック Picard–Lefschetz 理論 [10, Section 1] により，このモノドロミー φ は消滅サイクル

$V(\delta_j)$ に沿う **Dehn ツイスト**のアイソトピー類 $[\tau_{V(\delta_j)}]$ であることが知られている．境界 $\partial\mathbb{D}^2$ 上に f を制限した場合も，シンプレクティックファイバー束が得られ，そのモノドロミーが考えられる．$\partial\mathbb{D}^2$ はループの積 $\ell_1\cdots\ell_k$ とホモトピックであったことから，このモノドロミーは $[\tau_{V(\delta_k)}]\circ\cdots\circ[\tau_{V(\delta_1)}]$ に他ならない（基本群と写像の合成の順番の違いに注意）．これを f の**大域モノドロミー**という．

Lefschetz 双ファイバー空間を定義するためにもう一つ言葉を用意する．

定義 3. パス $\gamma:[-1,1]\to\mathbb{D}^2$ が *Lefschetz* ファイバー空間 f に関する**マッチングパス**であるとは以下を満たすときにいう（図 *2*）：

1. $\gamma^{-1}(Critv(f))=\{\pm1\}$ かつ $\gamma(-1)\neq\gamma(1)$；
2. $\gamma_\pm:[0,1]\to\mathbb{D}^2$ を $\gamma_\pm(t):=\gamma(\pm t)$ で定めるとき，消滅サイクル $V(\gamma_-)$，$V(\gamma_+)$ は $(f^{-1}(\gamma(0)),d\lambda_{f^{-1}(\gamma(0))})$ の中の "枠付き" *Lagrange* 球面として一致する．

ここで，n 次元 Lagrange 球面の枠とは $\mathbb{R}^{n+1}$ の中の単位球面 $\mathbb{S}^n$ と Lagrange 球面との間の微分同相写像のことである．本稿では，枠についてはこれ以降とくに言及しない．詳しくは [11, Section 16] を参照してほしい．$S(\gamma):=\Delta(\gamma_-)\cup\Delta(\gamma_+)$ は Lagrange 球面であるが，これを γ の上の**マッチングサイクル**という．

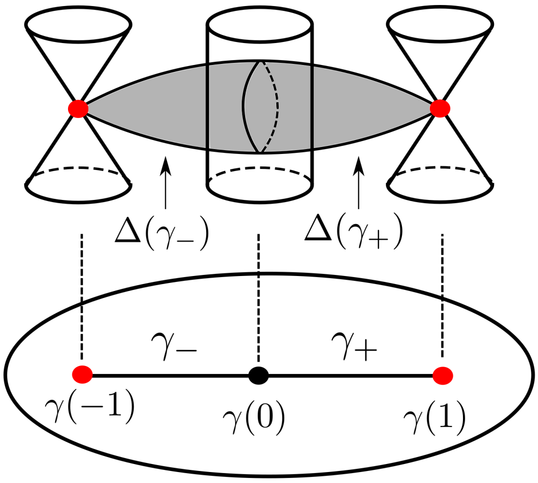

図 2: マッチングパス γ とその上のマッチングサイクル $S(\gamma)=\Delta(\gamma_-)\cup\Delta(\gamma_+)$

2.2. Lefschetz 双ファイバー空間

Lefschetz 双ファイバー空間とは，簡単に言うと Lefschetz ファイバー空間のファイバーがまた Lefschetz ファイバー空間の構造を持つファイバー空間のことである．本稿では，まず抽象的な組として Lefschetz 双ファイバー空間を定義し，後にそのデータから対応する Lefschetz ファイバー空間を構成する．

定義 4. ***アブストラクト Lefschetz 双ファイバー空間***とは，組

$$(f:(W,d\lambda)\to\mathbb{D}^2;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$$

のことである．ただし，$f:(W,d\lambda)\to\mathbb{D}^2$ は *Lefschetz* ファイバー空間で，$(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ は f に関するマッチングパスの順序付き組である．

アブストラクト Lefschetz 双ファイバー空間 $(f : (W, d\lambda) \to \mathbb{D}^2; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ から，Lefschetz ファイバー空間を構成する．まず，得られる Lefschetz ファイバー空間は局所的には以下のようになる：

$$F_0 : \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{pr_1} \mathbb{C},$$
$$\pi(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2, z_{n+1}),\ pr_1(w, z) = w.$$

$w_0 \in \mathbb{C} \setminus 0$ に対し，制限

$$\pi| : F_0^{-1}(w_0) = \{z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = w_0\} \to \mathbb{C}_{w_0} = \{(w_0, z) \in \mathbb{C}\}$$

を考える．これは，$\mathrm{Critv}(\pi|) = \{z^2 = w_0\}$ で，ファイバーが余接束 T^*S^n にシンプレクティック同型で，消滅サイクルがその零切断の像と同一視される Lefschetz ファイバー空間である．これを基に $(f : (W, d\lambda) \to \mathbb{D}^2; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ に対する Lefschetz 双ファイバー空間を構成する．特に $m = 1$ の場合，$(f : (W, d\lambda) \to \mathbb{D}^2; \gamma)$ の場合をまずは考える．

はじめに，γ とその上のマッチングサイクル $S(\gamma)$ の近傍 $N(\gamma)$，$N(S(\gamma))$ を制限 $f| : N(S(\gamma)) \to N(\gamma)$ が Lefschetz ファイバー空間になるようにとる．ここで，$N(S(\gamma))$ はある半径 s の余接束 $D_sT^*S^n$ にシンプレクティック同型であることに注意する．$\mathbb{D}^2 \times W$ と写像 $id \times f : \mathbb{D}^2 \times W \to \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$ を考える．コンパクトな部分多様体 $E \subset \mathbb{C}^{n+1}$ をうまく選ぶことにより，先ほどの $F_0 : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ の E への制限が，ファイバーが $D_sT^*S^n$ にシンプレクティック同型である Lefschetz ファイバー空間 $F_0| : E \xrightarrow{\pi|_E} \mathbb{D}^2 \times D^2 \xrightarrow{pr_1|} \mathbb{D}2$ とすることができる．あとは，$\mathbb{D}^2 \times N(S(\gamma))$，$\mathbb{D}^2 \times N(\gamma)$ を $\mathbb{D}^2 \times W$，$\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$ から引き抜き，代わりに E，$\mathbb{D}^2 \times D^2$ を貼り合わせればよい．その結果，Lefschetz ファイバー空間 $F : X \coloneqq (\mathbb{D}^2 \times W \setminus N(S(\gamma))) \cup E \to \mathbb{D}^2 \times ((\mathbb{D}^2 \setminus N(\gamma)) \cup D) \to \mathbb{D}^2$ で，ファイバーが $(W, d\lambda)$ にシンプレクティック同型で，消滅サイクルが $S(\gamma)$ になるものが構成された．一般の $(f : (W, d\lambda) \to \mathbb{D}^2; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ に対しても，ファイバー和という操作を用いて，ファイバーが $(W, d\lambda)$ であり消滅サイクルが $S(\gamma_1), \dots, S(\gamma_m)$ である Lefschetz ファイバー空間が得られる．

2.3. オープンブック

主定理を述べるためにオープンブックを定義する．

定義 5. **アブストラクトオープンブック**とは組 $(\Sigma, d\lambda; \varphi)$ のことである．ただし，$(\Sigma, d\lambda)$ は境界付きコンパクト有向完全シンプレクティック多様体のことで，φ は Σ の境界の近くでは恒等的である $(\Sigma, d\lambda)$ のシンプレクティック同型写像である．

$\dim \Sigma = 2n$ であるアブストラクトオープンブック $(\Sigma, d\lambda; \varphi)$ を与えたとき，次のように $(2n+1)$ 次元閉多様体 $M(\Sigma, d\lambda; \varphi)$ を構成することができる：

$$M(\Sigma, d\lambda; \varphi) \coloneqq \frac{\Sigma \times [0,1]}{(x,1) \sim (\varphi(x), 0)} \cup_\partial \partial\Sigma \times \mathbb{D}^2,$$

ただし，$\cup_\partial : (\partial\Sigma \times [0,1])/\sim \to \Sigma \times \partial\mathbb{D}^2, (x, \theta) \mapsto (x, e^{2\pi i\theta})$．オープンブックの間の同型を定義するために $T(\Sigma, d\lambda; \varphi) \coloneqq \frac{\Sigma \times [0,1]}{(x,1) \sim (\varphi(x),0)}$ とおく．

定義 6. *2* つのアブストラクトオープンブック $(\Sigma_j, d\lambda_j; \varphi_j) (j = 1, 2)$ が**同型**であるとは，$T(\Sigma_j, d\lambda_j; \varphi_j)\ (j = 1, 2)$ が $S^1 = [0,1]/\sim$ 上のシンプレクティックファイバー束として同型であるときをいう．

注意 7. $M(\Sigma, d\lambda; \varphi)$ はシンプレクティック構造 $d\lambda$ には依らない．どのような場合に，この $d\lambda$ の情報が効いてくるかというと，オープンブックの構造から $M(\Sigma, d\lambda; \varphi)$ 上に接触構造を付随させたときである．本稿ではその接触構造の構成については立ち入らないが，興味のある方は例えば *[3, Chapter 7.3]* を参照して欲しい．以下では，接触構造を考えない場合は $d\lambda$ を省略し，φ は Σ の向きを保つ微分同相写像として考える．

上では，オープンブックから多様体を構成したが，その逆が成り立つこともある．すなわち，$(2n+1)$ 次元閉多様体 M に対し，アブストラクトオープンブック $(\Sigma; \varphi)$ が存在し，M が $M(\Sigma, \varphi)$ と微分同相である．このとき，(Σ, φ) を M **のオープンブック**と呼ぶことにする．

Lefschetz ファイバー空間とオープンブックの関係について述べておく．$f : (W, d\lambda) \to \mathbb{D}^2$ をファイバーが $(\Sigma, d\lambda)$ にシプレクティック同型な Lefschetz ファイバー空間とする．ある Hurwitz システムに対する f の大域モノドロミーを φ とする．このとき，制限 $f| : f^{-1}(\partial\mathbb{D}^2) \to \partial\mathbb{D}^2$ はファイバー束になるが，これは ∂W のオープンブック $(\Sigma, d\lambda; \varphi)$ を誘導する．

3. 主結果と構成

3.1. 結果

定理 8 (大場)**.** *任意の 2 以上の自然数 n に対し，以下を満たす $4n$ 次元多様体上の Lefschetz ファイバー空間の無限族 $\{F_j : X_j \to \mathbb{D}^2\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在する：*

1. *各 F_j は互いに非同型な Lefschetz ファイバー空間である；*
2. *各 F_j から誘導されるオープンブックは j に依らず全て同型である．*

Lefschetz ファイバー空間の全空間は Stein 構造を許容し，境界に誘導されるオープンブックからは接触多様体が得られることが知られている．特に，このようにして得られた Stein 領域は今得られた接触多様体の Stein 充填である．したがって，次の系を得る．

系 9 (大場 [8, Theorem 1.1])**.** *任意の 2 以上の自然数 n に対し，ホモトピー型が相異なる Stein 充填を無限個もつ $(4n-1)$ 次元接触多様体 (M, ξ) が存在する．*

注意 10. 定理 *8* と系 *9* について，それぞれの条件を満たす *Lefschetz* ファイバー空間，接触多様体は各次元において無限個構成できる．

3.2. 構成法

Lefschetz 双ファイバー空間を用いて構成するが，その構成の鍵となるのは A_4**-Milnor ファイバー**である．十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\mathbb{C}^{n+1} \supset V_4 \coloneqq \{\Sigma_{j=1}^{n} z_j^2 + z_{n+1}^5 = \varepsilon\} \cap \{\Sigma_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = 1\}$$

と定め，これを A_4**-Milnor ファイバー**という．この V_4 は（実）$2n$ 次元多様体であり，$\mathbb{C}^{n+1}$ 上の $d(\frac{\sqrt{-1}}{4} \sum_{j=1}^{n+1} (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j))$ の制限としてシンプレクティック構造 $d\lambda_0$ を定めることができる．第 $n+1$ 成分への射影 $f : V_4 \ni (z_1, \ldots, z_{n+1}) \mapsto z_{n+1} \in \mathbb{C}$ を考えると，これは Lefschetz ファイバー空間であり，$\mathrm{Critv}(f) = \{z^{n+1} = \varepsilon\}$ となる．この f の重要な性質としては，定義 3 の 1 つ目の条件を満たすすべてのパス γ がマッチングパスになるという点である [6, Section 6.c].

具体的な構成は以下のようにする．まず，マッチングパス $\gamma_1, \ldots, \gamma_4, \delta$ を図3に示すようにとる．また，γ_j^k を $\tau_\delta^k(\gamma_j)$ と定める．ただし τ_δ は δ に沿う右手ハーフツイストとする．アブストラクト Lefschetz 双ファイバー空間を次のように定義する：

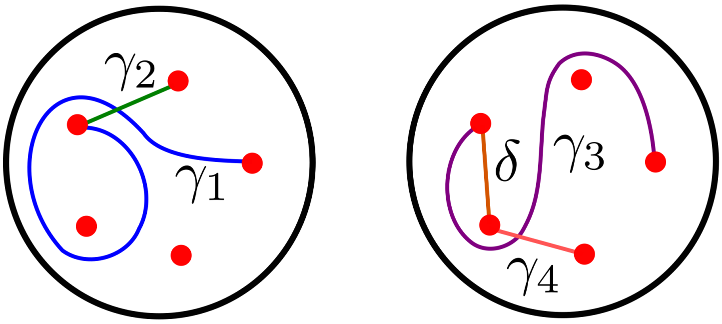

図 3: マッチングパス $\gamma_1, \ldots, \gamma_4, \delta$

$$(f : (V_4, d\lambda_0) \to \mathbb{D}^2; \gamma_1^k, \gamma_2^k, \gamma_3^k, \gamma_2, \gamma_4).$$

この Lefschetz 双ファイバー空間から前節で構成したように，Lefschetz ファイバー空間 $F_k : X_k \to \mathbb{D}^2$ でファイバーが A_4-Milnor ファイバー $(V_4, d\lambda_0)$，消滅サイクルが $S(\gamma_1^k), S(\gamma_2^k), S(\gamma_3^k), S(\gamma_2), S(\gamma_4)$ であるものが得られる．これらの消滅サイクルに沿う Dehn ツイストに関し次が成り立つ：

$$[\tau_{S(\gamma_3^k)}] \circ [\tau_{S(\gamma_2^k)}] \circ [\tau_{S(\gamma_1^k)}] = [\tau_{S(\gamma_3^{k'})}] \circ [\tau_{S(\gamma_2^{k'})}] \circ [\tau_{S(\gamma_1^{k'})}]$$

ただし，$k, k' \in \mathbb{Z}$. よって，F_k の大域モノドロミー $[\tau_{S(\gamma_4)}]\circ[\tau_{S(\gamma_2)}]\circ[\tau_{S(\gamma_3^k)}]\circ[\tau_{S(\gamma_2^k)}]\circ[\tau_{S(\gamma_1^k)}]$ は等しく，誘導するオープンブックが同型になる．

全空間 X_k たちを区別するために，$\dim V_4 = 4n - 2$ と仮定する．このとき，

$$H_{2n-1}(X_k; \mathbb{Z}) \cong \frac{H_{2n-1}(V_4; \mathbb{Z})}{\langle [S(\gamma_1^k)], [S(\gamma_2^k)], [S(\gamma_3^k)], [S(\gamma_2)], [S(\gamma_4)] \rangle} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0) \\ \mathbb{Z}_k & (k > 0). \end{cases}$$

であることがわかり，X_k はホモトピー型が異なることがわかる．とくに，Lefschetz ファイバー空間 F_k は非同型である．これで定理が得られた．

注意 11. この証明は $\dim V_4 = 4n$ の場合は有効でない．これは，消滅サイクルのホモロジー類 $[S(\gamma_j^k)] \in H_{2n}(V_4; \mathbb{Z})$ が k の偶奇で一致してしまうためである．また，対応する X_k の微分同相類も k の偶奇で一致していると予想されている．そのため，無限個を区別するためには，シンプレクティック多様体や *Stein* 領域のより精密な不変量が必要と考えられる．

謝辞：研究集会「第13回数学総合若手研究集会」での講演の機会をくださった北海道大学の世話人の皆様に感謝申し上げます．

参考文献

[1] S. Akbulut and B. Ozbagci, *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces.* Geom. Topol. 5 (2001), 319–334.

[2] S. K. Donaldson, *Lefschetz pencils on symplectic manifolds.* J. Differential Geom. 53 (1999), no. 2, 205–236.

[3] H. Geiges, *An introduction to contact topology.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 109. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[4] E. Giroux and J. Pardon, *Existence of Lefschetz fibration on Stein and Weinstein domains.* arXiv:1411.6176.

[5] R. E. Gompf, *Toward a topological characterization of symplectic manifolds.* J. Symplectic Geom. 2 (2004), no. 2, 177–206.

[6] M. Khovanov and P. Seidel, *Quivers, Floer cohomology, and braid group actions.* J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 1, 203–271.

[7] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of* B^4. Invent. Math. 143 (2001), no. 2, 325–348.

[8] T. Oba, *Higher-dimensional contact manifolds with infinitely many Stein fillings*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[9] B. Ozbagci and A. Stipsicz, *Contact 3-manifolds with infinitely many Stein fillings.* Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 5, 1549–1558.

[10] P. Seidel, *A long exact sequence for symplectic Floer cohomology.* Topology 42 (2003), no. 5, 1003–1063.

[11] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.