

2次元ブレイドの一般化

石地 知興 (東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻修士2年)

概 要

ブレイド(組みひも)を2次元に拡張した概念として,2次元ブレイドがある.通常2次元ブレイドというと $D^2 \times D^2$ に埋め込まれた曲面を指す.一方で私が研究しているのは,ファイバーがコンパクト曲面の2次元ブレイドである.言い換えれば Σ をコンパクト曲面としたとき $\Sigma \times D^2$ に埋め込まれた曲面である.本稿では,その2次元ブレイドについて明らかになったことについて報告する.

1. ブレイド

ブレイドを定義する方法はいくつかあるが,ここでは次のように定義する.

D^2 を2次元円盤とし, $I = [0, 1]$ とする. また, $pr_2 : D^2 \times I \rightarrow I$ を第二成分への射影とする. $Q_m = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset \text{Int}D^2$ とする.

定義 1.1. 幾何的 m -ブレイドとは, $D^2 \times I$ にプロパーに埋め込まれた1次元多様体で,次の条件を満たすものである.

- (1) $pr_2|_b : b \rightarrow I$ は次数 m の被覆写像である.
- (2) $\partial b = Q_m \times \partial I$.

二つの幾何的 m -ブレイドをつなぐ,ファイバーを保つアンビエントアイソトピーが存在するとき,それらは同値であるという. その同値類を m -ブレイドということとする. m -ブレイド全体の集合を B_m で表す. よく知られているとおり, B_m には積が定義でき,この積に関して群になる. $B_m \cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1} | \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i (|i - j| > 1), \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j (|i - j| = 1) \rangle$ である.

同様に,他のコンパクト曲面上のブレイドを定義できる. Σ を Σ_g^b ($g \geq 0, b \geq 0$)または N_g^b ($g \geq 1, b \geq 0$)とする. ただし, Σ_g^b は種数 g , 境界成分数 b の向きづけ可能曲面である. N_g^b は種数 g , 境界成分数 b の向きづけ不可能曲面である. $Q_m = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset \text{Int}\Sigma$ とする.

定義 1.2. Σ 上の幾何的 m -ブレイドとは, $\Sigma \times I$ にプロパーに埋め込まれた1次元多様体で,次の条件を満たすものである.

- (1) $pr_2|_b : b \rightarrow I$ は次数 m の被覆写像である.
- (2) $\partial b = Q_m \times \partial I$.

二つの Σ 上の幾何的 m -ブレイドをつなぐ,ファイバーを保つアンビエントアイソトピーが存在するとき,それらは同値であるという. その同値類を Σ 上の m -ブレイドということとする. Σ 上の m -ブレイド全体の集合を $B_m(\Sigma)$ で表す. $B_m(\Sigma)$ には積が定義でき,この積に関して群になる. この群の表示も知られている. S^2 の場合を示しておく. $B_m(S^2) \cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1} | \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i (|i - j| > 1), \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j (|i - j| = 1), \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1} \sigma_{m-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = 1 \rangle$ である.

2. 2次元ブレイド

前節でブレイドを定義した. この節では, ブレイドを2次元へ拡張する. ([1])

D_1^2 と D_2^2 を2次元円盤とし, $pr_2 : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_2^2$ を第二成分への射影とする. $X_m = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset \text{Int}D_1^2$ とする.

定義 2.1. 次数 m の2次元ブレイドとは $D_1^2 \times D_2^2$ にプロパーに埋め込まれたコンパクト有向2次元多様体 S で次の条件を満たすものである.

- (1) $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$ は次数 m の単純分岐被覆写像である.
- (2) $\partial S = X_m \times \partial D_2^2$.

3. Σ -2次元ブレイド

ファイバーがコンパクト曲面の2次元ブレイドを定義する.

Σ を Σ_g^b ($g \geq 0, b \geq 0$) または N_g^b ($g \geq 1, b \geq 0$) とし D^2 を2次元円盤とする. $pr_2 : \Sigma \times D^2 \rightarrow D^2$ を第二成分への射影とする. $X_m = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset \text{Int}\Sigma$ とする.

定義 3.1. 次数 m の Σ -2次元ブレイドとは, $\Sigma \times D^2$ にプロパーに埋め込まれたコンパクト有向2次元多様体 S で次の条件を満たすものである.

- (1) $pr_2|_S : S \rightarrow D^2$ は次数 m の単純分岐被覆写像である.
- (2) $\partial S = X_m \times \partial D^2$.

Σ -2次元ブレイド全体の集合に同値関係を定義する.

定義 3.2. 次数 m の Σ -2次元ブレイド S, S' が同値 (*equivalent*) とは次の条件を満たすアンビエントアイソトピー $\{h_u : \Sigma \times D^2 \rightarrow \Sigma \times D^2\}_{u \in [0,1]}$ が存在するときを言う:

(1) $h_0 = id_{\Sigma \times D^2}, h_1(S) = S'$.

(2) $\{h_u\}_{u \in [0,1]}$ はファイバーを保つ, つまり,

$h_u \circ pr_2 = pr_2 \circ h_u$ ($\forall u \in [0,1]$) を満たすようなアンビエントアイソトピー $\{h_u : D^2 \rightarrow D^2\}_{u \in [0,1]}$ が存在する.

(3) 全ての $u \in [0,1]$ に対して, $h_u|_{\Sigma \times \partial D^2} = id_{\Sigma \times \partial D^2}$.

Σ -2次元ブレイド S の同値類を $[S]$ と書くことにする.

Σ -2次元ブレイドには積が定義できる.

$S_1 \subset \Sigma \times D^2, S_2 \subset \Sigma \times D^2$ を次数 m の Σ -2次元ブレイドとする. D^2 をプロパーな弧によって二つの2次元円盤に分けることを考える. これを $D^2 = E_1 \cup E_2$ とする. そして, D^2 と E_1 を微分同相写像 $f_1 : D^2 \rightarrow E_1$ によって, D^2 と E_2 を微分同相写像 $f_2 : D^2 \rightarrow E_2$ によって同一視する. これによって, $S_1 \subset \Sigma \times E_1, S_2 \subset \Sigma \times E_2$ と思える. そこで曲面 $S_1 \cup S_2$ を考えるとこれは Σ -2次元ブレイドになっている.

定義 3.3. この Σ -2次元ブレイドは $S_1 \cdot S_2$ と書かれ, S_1 と S_2 の積と呼ばれる. そして, $[S_1] \cdot [S_2] = [S_1 \cdot S_2]$ と定義するとこれは *well-defined* である.

$C_m(\text{Int}\Sigma)$ を順序のない $\text{Int}\Sigma$ の m 点配置空間とする.

定理 3.4. 次数 m の非分岐 Σ -2次元ブレイド全体は積に関して群をなし, それは $\pi_2(C_m(\text{Int}\Sigma))$ と同型である.

系 3.5. $\mathcal{B}_m(\Sigma_0) \cong \mathcal{B}_m(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m = 1, 2) \\ \{0\} & (m \geq 3), \end{cases}$

$$\mathcal{B}_m(\Sigma_g) \cong \{0\} (\forall m, g \geq 1),$$

$$\mathcal{B}_m(N_1) \cong \mathcal{B}_m(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m = 1) \\ \{0\} & (m \geq 2), \end{cases} \quad \mathcal{B}_m(N_g) \cong \{0\} (\forall g \geq 2, \forall m \geq 1),$$

$$\mathcal{B}_m(\Sigma_g^p) \cong \{0\} (\forall m \geq 1, \forall g \geq 0, \forall p \geq 1),$$

$$\mathcal{B}_m(N_g^p) \cong \{0\} (\forall m \geq 1, \forall g \geq 1, \forall p \geq 1).$$

Σ -2次元ブレイドに対して、ブレイドモノドロミーと呼ばれる基本群からブレイド群への準同型写像を考えることができる。

S を次数 m の Σ -2次元ブレイドとし、 $\Delta(S) \subset \text{Int}D^2$ を分岐点集合とする。基点 $q_0 \in \partial D^2$ をとる。 $\gamma : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (D^2 - \Delta(S), q_0)$ を q_0 を基点とするループとする。すると、次の $C_m(\text{Int}\Sigma)$ のループ $l_\gamma : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (C_m(\text{Int}\Sigma), X_m)$ を考えることができる。

$$l_\gamma(x) = pr_1(S \cap pr_2^{-1}(x)).$$

これによって、次の対応 $\rho_S : \pi_1(D^2 - \Delta(S), q_0) \rightarrow \pi_1(C_m(\text{Int}\Sigma), X_m) (\cong B_m(\Sigma))$

$$\rho_S([l]) = [l_\gamma]$$

を考えることができる。 ρ_S は well-defined で、準同型写像となる。

定義 3.6. 準同型 ρ_S を S のブレイドモノドロミーという。

以下では $\Sigma = S^2$ の場合に焦点をあてていく。

定義 3.7. 次数 $m \geq 3$ の S^2 -2次元ブレイドチャートとは有限グラフ $\Gamma \subset \text{Int}D^2$ で次の条件を満たすものをいう：

- (1) 全ての辺は向きづけられ、整数 $\{1, 2, \dots, m-1\}$ でラベルづけされている。
- (2) 1価, 4価, 6価, $2(m-1)$ 価の頂点がある。1価頂点を黒頂点という。6価頂点と $2(m-1)$ 価頂点を白頂点という。
- (3) 各6価頂点に対して3本の連続した辺はその頂点に向かう向きである。そして他の3本の辺は頂点から出る向きである。そして、6本の辺は $|i-j|=1$ を満たす i, j によって交互にラベルづけされている。
- (4) 各4価頂点に対して、対角の位置にある辺は同じ数字でラベルづけされている。そして、並行な向きをもつ。ただし、ラベル i, j は $|i-j| > 1$ を満たす。
- (5) 各 $2(m-1)$ 価頂点に対して、辺は順番に $1, 2, \dots, m-1, m-1, \dots, 2, 1$ とラベルづけされている。辺の向きはすべて頂点に向かう向きか、全て頂点から出る向きのいずれかである。

次数 $m \geq 3$ の S^2 -2次元ブレイドチャート Γ に対してブレイドモノドロミー ρ_Γ を考えることができる。そのためにまず、曲線 $\alpha : [0, 1] \rightarrow D^2$ が Γ に関して一般の位置にあることを次で定義する：

- (1) $\alpha([0, 1]) \cap V(\Gamma) = \phi$. ただし $V(\Gamma)$ は Γ の頂点集合である。
- (2) $\alpha^{-1}(\Gamma) = \{t_1, \dots, t_s\} \subset \text{Int}[0, 1]$. ただし $\alpha^{-1}(\Gamma) = \phi$ も認める。
- (3) 各 $j \in \{1, \dots, s\}$ に対して、 t_j の開近傍 $U(t_j)$ が存在して、 $\alpha|_{U(t_j)}$ ははめ込みとなり、

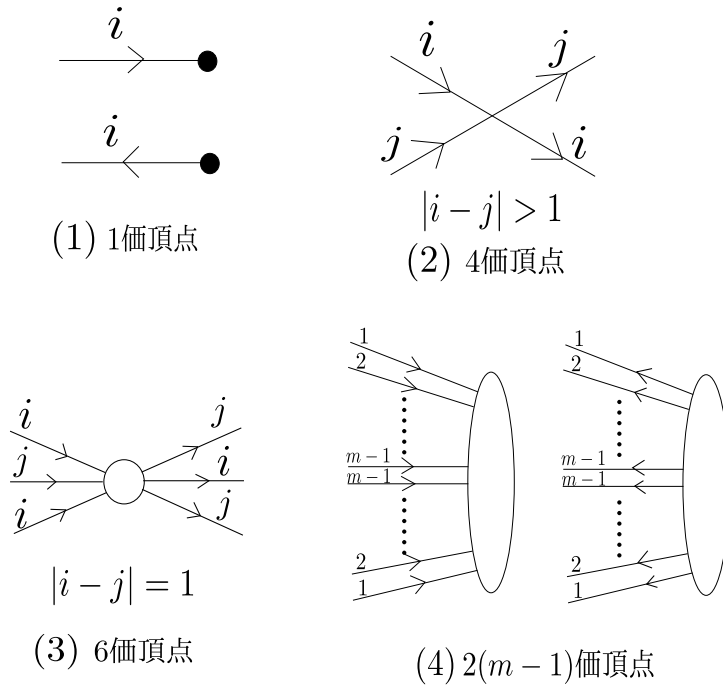


図 1: S^2 -2次元ブレイドチャートの頂点

Γ の辺と $\alpha(t_j)$ にて横断的に交わる.

$\alpha : [0, 1] \rightarrow D^2$ が Γ に関して一般の位置にあるとき, 交叉語 $w_\Gamma(\alpha)$ を次のように定義できる. α に沿って進んだとき, $\alpha(t_j)$ にてラベル i の辺が右から左へ突き抜けていたとき, 交点 $\alpha(t_j)$ に対して σ_i を対応付ける (図2左). 左から右へ突き抜けている場合には σ_i^{-1} を対応付ける (図2右). α に沿って上の規則で読んでいくと語ができる. これを Γ に関する α の交叉語という. $w_\Gamma(\alpha)$ で表す.

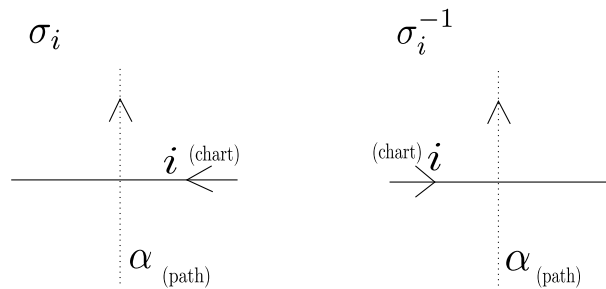


図 2: 交叉語

$\Delta(\Gamma)$ で黒頂点集合を表すこととする. $l : [0, 1] \rightarrow (D^2 - \Delta(\Gamma), q_0)$ を Γ に関して一般の位置にあるループとする.

定義 3.8. 準同型写像 $\rho_\Gamma : \pi_1(D^2 - \Delta(\Gamma), q_0) \rightarrow B_m(S^2)$ ($\rho_\Gamma([l]) = w_\Gamma(l)$) を S^2 -2次元ブレイドチャート Γ のブレイドモノドミーという.

定理 3.9. 任意の次数3以上の S^2 -2次元ブレイド S に対して, S^2 -2次元ブレイドチャート Γ が存在して $\rho_\Gamma = \rho_S$ となる. 逆に任意の S^2 -2次元ブレイドチャート Γ に対して,

S^2 -2次元ブレイド S が存在して, $\rho_S = \rho_\Gamma$ となる.

普通の2次元ブレイドに関してもチャートを考えることができる.

定義 3.10. 次数 m の2次元ブレイドチャートとは有限グラフ $\Gamma \subset \text{Int}D^2$ で次の条件を満たすものをいう:

- (1) 全ての辺は向きづけられ, 整数 $\{1, 2, \dots, m-1\}$ でラベルづけされている.
- (2) 1価, 4価, 6価, $2(m-1)$ 価の頂点がある. 1価頂点を黒頂点という. 6価頂点と $2(m-1)$ 価頂点を白頂点という.
- (3) 各6価頂点に対して3本の連続した辺はその頂点に向かう向きである. そして他の3本の辺は頂点から出る向きである. そして, 6本の辺は $|i-j|=1$ を満たす i, j によって交互にラベルづけされている.
- (4) 各4価頂点に対して, 対角の位置にある辺は同じ数字でラベルづけされている. そして, 並行な向きをもつ. ただし, ラベル i, j は $|i-j| > 1$ を満たす.

S^2 -2次元ブレイドチャートと2次元ブレイドチャートの相違点は $2(m-1)$ 価頂点の有無のみである. 2次元ブレイドチャートについてもそのブレイドモノドロミーが定義3.8と全く同様に定義される. 定理3.9も同様に成立する.

S^2 -2次元ブレイドチャート Γ に対応する S^2 -2次元ブレイドを $S(\Gamma)$ と表すこととする. また, S^2 -2次元ブレイド S に対応する S^2 -2次元ブレイドチャート Γ を S のチャート表示と呼ぶことにする.

次の S^2 -2次元ブレイドチャート Γ_1, Γ_2 を考える. Γ_1, Γ_2 は2次元ブレイドチャートと思うこともできる. ただし, $m \geq 3$ とする.

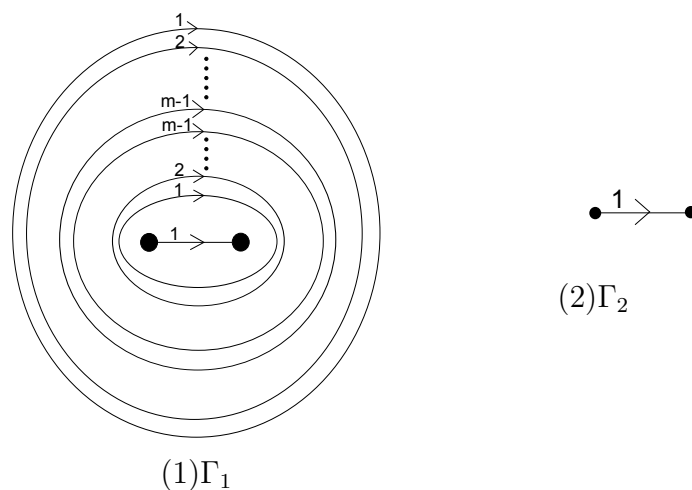


図 3: Γ_1, Γ_2

定理 3.11. $S(\Gamma_1)$ と $S(\Gamma_2)$ は2次元ブレイドとしては同値ではないが, S^2 -2次元ブレイドとしては同値になる.

4. Lefschetz fibration との結びつき

Σ_g を種数 g の有向閉曲面とする. \mathcal{M}_g を Σ_g の写像類群とする. $\iota \in \mathcal{M}_g$ を hyperelliptic involution とする.

定義 4.1. M と B をそれぞれコンパクト有向 4 次元多様体, 2 次元多様体とする. 全射 $f : M \rightarrow B$ が Lefschetz fibration であるとは, 次の条件を満たすときに言う:

- (1) $f^{-1}(\partial B) = \partial M$,
 - (2) f の任意の臨界点 $p \in \text{int}M$ に対して, p の座標近傍 (U, φ) と $f(p)$ の座標近傍 (V, ψ) が存在して $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ となる.
 - (3) どのファイバーも (± 1) 球面を含まない.
- M を全空間, B を底空間, f を射影という.

注意 4.2. 上で定義した Lefschetz fibration は achiral Lefschetz fibration と呼ばれているものである.

Δ を f の臨界値集合とする. このとき, $f|_{f^{-1}(B-\Delta)} : f^{-1}(B-\Delta) \rightarrow B-\Delta$ はファイバー束になっている. したがって, 基点 $b_0 \in B-\Delta$ と向きを保つ微分同相写像 $\Phi_0 : \Sigma_g \rightarrow f^{-1}(b_0)$ をとるとモノドロミー表現 $\rho_f : \pi_1(B-\Delta, b_0) \rightarrow \mathcal{M}_g$ を考えることができる.

定義 4.3. $\rho_f : \pi_1(B-\Delta, b_0) \rightarrow \mathcal{M}_g$ を Φ_0 に関する f のモノドロミー表現という.

定義 4.4. $f : M \rightarrow B, f' : M' \rightarrow B'$ を Lefschetz fibration とする. f と f' が同型 (isomorphic) であるとは, 向きを保つ微分同相写像 $H : M \rightarrow M', h : B \rightarrow B'$ が存在して, $f' \circ H = h \circ f$ となるときにいう.

補題 4.5. 次数が偶数の S^2 - 2 次元ブレイド S に対して S 上分岐する 2 重分岐被覆 $\alpha : M \rightarrow S^2 \times D^2$ が存在する. ただしここで M は 4 次元多様体である. さらに, M は微分同相の差を除いて一意である.

命題 4.6 ([2]). $pr_2 \circ \alpha : M \rightarrow D^2$ は Lefschetz fibration である.

補題 4.7. S_1 と S_2 を次数 $2m \geq 6$ の S^2 - 2 次元ブレイドとする. $f_1 : M_1 \rightarrow D^2, f_2 : M_2 \rightarrow D^2$ をそれぞれ S_1, S_2 から定理 4.6 のようにして定まる Lefschetz fibration とする. もしも S_1 と S_2 が同値であるならば, f_1 と f_2 は同型になる.

補題 4.8. S を S^2 - 2 次元ブレイドとする. Γ を S のチャート表示とする. $f : M \rightarrow D^2$ を S に対して定まる Lefschetz fibration とする. 向きを保つ微分同相写像 $\Phi_0 : \Sigma_g \rightarrow f^{-1}(b_0)$ を適切にとって, Φ_0 に関する f のモノドロミー表現 ρ_f を考える. このとき, Γ が持つ $2(2m-1)$ 価頂点の個数が偶数ならば $\rho_f(\partial D^2) = [id]$ となり, 奇数ならば $\rho_f(\partial D^2) = \iota$ となる.

補題 4.7, 補題 4.8 より次の定理が直ちに従う.

定理 4.9. S_1, S_2 を次数 $2m \geq 6$ の S^2 - 2 次元ブレイドとする. Γ_1, Γ_2 を S_1, S_2 のチャート表示とする. もしも S_1 と S_2 が同値であるならば, Γ_1 と Γ_2 がもつ $2(2m-1)$ 価頂点の個数の偶奇は等しい.

これはすなわち $2(2m-1)$ 価頂点の個数の偶奇が S^2 - 2 次元ブレイドの不変量になっていることを意味している.

謝辞 このような研究発表の場を設けてくださった北海道大学の世話人の方々には大変感謝しております。ありがとうございます。

参考文献

- [1] S.Kamada, *Braid and knot theory in dimension four*, Math. Surveys Monogr. **95**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [2] A. Loi, R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4* , Invent. math. **143** (2001) 325–348