# 向き付け不可能曲面の写像類群とDehn twist

大森　源城　(東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻)*

## 1. 導入

$N_{g,n}$ を種数 $g$，境界成分数 $n$ の連結な向き付け不可能コンパクト曲面，$\Sigma_{g,n}$ を種数 $g$，境界成分数 $n$ の連結な向き付け可能コンパクト曲面とする．$S$ を $N_{g,n}$ もしくは $\Sigma_{g,n}$ とした時に，$\mathcal{M}(S)$ を $S$ の写像類群，すなわち $S$ の境界上恒等的な自己微分同相写像の境界を固定するアイソトピー類からなる群とする．ただし，$S$ が向き付け可能な場合は向きを保つ写像類のみを考えることにする．本稿では，以下 $n \in \{0,1\}$ を仮定する．

Humphries [3] は，$g \geq 2$ に対し，$\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ はある $2g+1$ 個のDehn twistで生成され，それ以下の個数のDehn twistでは生成されないことを示した．曲面が向き付け不可能な場合には，その写像類群 $\mathcal{M}(N_{g,n})$ はDehn twistだけでは生成されない事がLickorish [4] によって示されており，更に彼は $\mathcal{M}(N_{g,n})$ がDehn twistとY-同相写像によって生成される事も示している．その後，Szepietowski [6] によって，$g$ 個のDehn twistと1個のY-同相写像による $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の生成系が与えられている。このSzepietowskiの生成系が，Dehn twistとY-同相写像による $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の生成系の中で最小のものである事を廣瀬氏 [2] が示している．

Dehn twist全体で生成される $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の部分群をツイスト部分群と呼び，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ と書く．Chillingworth [1] は，$g \geq 4$ が偶数の時 $\mathcal{T}(N_{g,n})$ は $g+3$ 個のDehn twistで生成される事を示し，$g \geq 5$ が奇数の時 $\mathcal{T}(N_{g,n})$ は $g+2$ 個のDehn twistで生成される事を示した．その後，Stukow [5] によって $\mathcal{T}(N_{g,n})$ の有限表示が与えられている．その表示の生成系と関係式から，任意の $g \geq 4$ に対し，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ は $g+2$ 個のDehn twistで生成される事が分かる．

本稿では，任意の $g \geq 4$ に対し，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ は $g+1$ 個のDehn twistで生成される事について紹介する．廣瀬氏 [2] の議論を $\mathcal{T}(N_{g,n})$ に対し適用する事で，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ も $g$ 個より少ないDehn twistでは生成されない事が分かる．従って，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ のDehn twistによる生成元の最小個数は $g$ か $g+1$ である．

## 2. 準備

$N_{g,n}$ 上の双側な単純閉曲線 $c$ と $c$ の正則近傍の向きを一つ取る．この時，$c$ に沿った右手Dehn twistとは，$c$ で曲面を切り開き，切り開いてできる片方の境界を正則近傍の向きに従って右に360度回転させ，再び貼り合わせる操作で得られる微分同相写像のアイソトピー類のことである（図1参照）．Dehn twistの正の向きを，簡単に，図1のように，曲線の脇の矢印で表す事にする．

$n \in \{0,1\}$ を仮定する．$N_{g,n}$ のモデルとして，$g$ 個若しくは $g+1$ 個の境界成分を持つ2次元球面を用意して，その $g$ 個の境界の対蹠点を同一視したものをとる．対蹠点を同一視した印として，図2のように×印を書くことにする． $N_{g,n}$ 上の双側な単純閉曲線 $\alpha_1$，...，$\alpha_{g-1}$，$\beta$ を図2のようにとり，$\psi$，$\varepsilon$，$\zeta$，$\gamma$ を図3のようにとる．この時，これらの曲線に沿ったDehn twistを，$a_i := t_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, g-1)$，$b := t_\beta$，$e := t_\varepsilon$，

本研究は科研費 (課題番号:15J10066) の助成を受けたものである．
*e-mail: omori.g.aa@m.titech.ac.jp

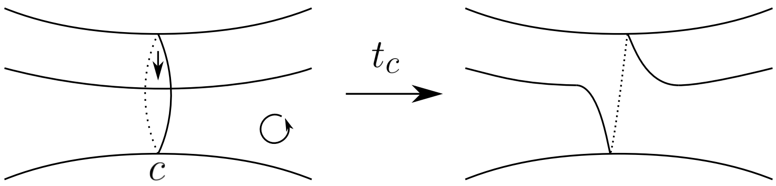


図 1: 双側な単純閉曲線 $c$ に沿った Dehn twist.

$f := t_\zeta$，$y^2 := t_\psi$，$c := t_\gamma$ で定義する．Stukow [5] が与えた $\mathcal{T}(N_{g,n})$ の有限表示は，これらの Dehn twist を生成系とするものであり，その表示の関係式から $\mathcal{T}(N_{g,n})$ は $a_1$，$\ldots$，$a_{g-1}$，$b$，$e$，$f$ によって生成されることが分かる．

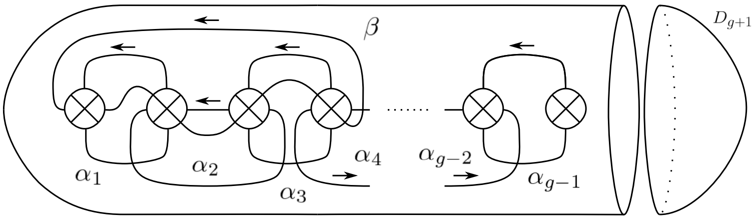


図 2: $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\alpha_1$，$\ldots$，$\alpha_{g-1}$，$\beta$.

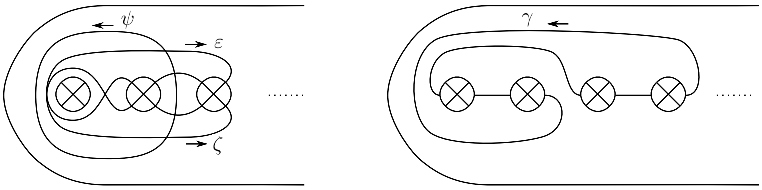


図 3: $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\psi$，$\varepsilon$，$\zeta$，$\gamma$.

## 3. 主結果

以下が本稿の主結果である．

**定理 3.1.** $g \geq 4$ かつ $n \in \{0, 1\}$ に対し，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ は $a_1$，$\ldots$，$a_{g-1}$，$b$，$e$ によって生成される．特に，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ は $g+1$ 個の *Dehn twist* で生成される．

**注意 3.2.** $a_1 \cup \cdots \cup a_{g-1}$ の $N_{g,n}$ 内での正則近傍 $\Sigma$ は $N_{g,n}$ の向き付け可能な部分曲面である．Dehn twist $a_1$，$\ldots$，$a_{g-1}$，$b$ はその部分曲面 $\Sigma$ をアイソトピーの差を除いて保つため，$\Sigma$ の写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma)$ の元だと思える．しかし，$e$ は $\Sigma$ を保たないため，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ は $a_1$，$\ldots$，$a_{g-1}$，$b$ では生成されない．

1 章でも述べたように，廣瀬氏 [2] の議論を $\mathcal{T}(N_{g,n})$ に対し適用する事で，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ も $g$ 個より少ない Dehn twist では生成されない事が分かる．最後に，次の問題を提起する．

**問題 3.3.** $g \geq 4$ かつ $n \in \{0, 1\}$ に対し，$\mathcal{T}(N_{g,n})$ の Dehn twist による生成元の最小個数は $g$ と $g+1$ のどちらか？

## 参考文献


[1] D. R. J. Chillingworth, *A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **65** (1969), 409–430.

[2] S. Hirose, *Generators for the mapping class group of the nonorientable surface*, arXiv:1602.07419.

[3] S. P. Humphries, *Generators for the mapping class group*, Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), pp. 44–47, Lecture Notes in Math., 722, Springer, Berlin, 1979.

[4] W. B. R. Lickorish, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, Proc. Camb. Philos. Soc. **59** (1963), 307–317.

[5] M. Stukow, *A finite presentation for the twist subgroup of the mapping class group of a nonorientable surface*, Bull. Korean Math. Soc. **53** (2016), no. 2, 601–614.

[6] B. Szepietowski, *A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Kodai Math. J. **36** (2013), no. 1, 1–14.