

Bridgeland 安定性条件と曲面の双有理幾何学

東京大学大学院数理科学研究科 修士課程 2 年 小関直紀

1 導入

1.1 問題意識と主結果

本稿では、以下の問いについて考える。

問 1.1. 代数多様体 X と双有理同値な多様体を、 $D^b(X)$ 上の安定対象のモジュライ空間として記述することができるか？

このような問題意識が生まれたきっかけとなったのは、次の Bridgeland の結果である。

定理 1.2 ([2]). X を滑らかな 3 次元代数多様体とし、 $f: X \rightarrow Y$ をフロップ収縮とする。このとき、 f のフロップ $f^+: X^+ \rightarrow Y$ が存在する。さらに、導来圏の同値

$$\Phi: D^b(X^+) \cong D^b(X)$$

が存在する。

この定理の注目すべきポイントは以下の二つである：

- 3 次元の代数多様体の極小モデルは一意的とは限らないが、それらの導来圏は一意的である。
- 実は X^+ は $D^b(X)$ の対象のモジュライ空間として得られる。

導来圏はもともと層係数コホモロジーを扱うための技術的な道具として導入された概念であったため、導来圏を用いて双有理幾何学に応用を与えた Bridgeland の定理は大きな衝撃を与えた。それ以降、問 1.1 は多くの人によって研究されてきた。特に滑らかな曲面の極小モデルプログラムと導来圏の関係について、戸田は次のことを示した。

定理 1.3 ([8, 9]). X 上の安定性条件の 1 パラメータ族 $\{\sigma_t\}_{t \in [0,1]}$ と実数の列 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$ が存在して以下を満たす：任意の $i = 0, \dots, n$, $t \in (t_i, t_{i+1})$ に対して、 X_i はチャーン指標が $\text{ch}(\mathcal{O}_x)$ であるような σ_t -安定対象の良モジュライ空間である。

戸田の定理は、滑らかな曲面に対しては、問 1.1 の完全な回答を与えている。そこで筆者は、曲面に特異点も許した状況で問 1.1 について研究し、以下の二つの定理を得た：

定理 1.4 (主定理 A). X を射影的曲面とし、 $C \subset X$ を (-2) 曲線とする。また、 $f: X \rightarrow Y$ を C を A_1 型特異点へと収縮する双有理射とする。このとき、 Y は $D^b(X)$ 上の安定対象のモジュライ空間として実現できる。

定理 1.5 (主定理 B). Y を商特異点のみを持つ射影的曲面とし、 \mathcal{Y} を Y に付随するスタックとする。このと

き, Y の極小特異点解消は $D^b(\mathcal{Y})$ 上の安定対象のモジュライ空間として実現できる.

主定理 A は, (-1) 曲線の収縮 (つまり 極小モデルプログラムの各ステップ) だけでなく, (-2) 曲線の収縮についても戸田の定理の類似が成り立つことを示している. 一方主定理 B では, 特異点を持つ曲面 Y から出発して, その極小特異点解消が導来圏のモジュライ空間として実現できるということを意味している. 正確な定理の主張については, 定理 3.1, および定理 4.1 をみよ.

1.2 本稿の構成

まず 2 章において, 三角圏上の安定性条件の定義と基本的な事実を復習する. 続いて 3 章では主定理 A について, 4 章では主定理 B についてそれぞれ解説する.

2 三角圏上の安定性条件

三角圏上の安定性条件の概念は, 物理学の超弦理論における Douglas II-安定性の数学的定式化として, Bridgeland により導入された [3]. とくに 3 次元カラビヤウ多様体 X の接続層の導来圏上の安定性条件の空間は, ミラー多様体 \check{X} の複素構造のモジュライ空間と関係することが期待されている. 上記のような物理学のアイデアに起因して定義された安定性条件であるが, 代数幾何学の問題にも応用があることがわかり始めており, 近年注目を集めている.

2.1 安定性条件の定義

まず, アーベル圏上の安定関数の定義から始める.

定義 2.1. \mathcal{A} をアーベル圏とする.

1. \mathcal{A} 上の安定関数とは, 群準同型写像 $Z: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ であって, 以下の条件を満たすもののことである:

$$Z(\mathcal{A} \setminus \{0\}) \subset \mathcal{H}.$$

ここで \mathcal{H} は, 上半平面と実軸の負の部分 $\mathbb{R}_{<0}$ との和集合を表す.

2. Z は \mathcal{A} 上の安定関数とする. $E \in \mathcal{A}$ に対し, $\phi_Z(E) := \frac{1}{\pi} \arg Z(E) \in (0, 1]$ と定義する. 任意の真の部分対象 $F \subset E$ に対して,

$$\phi_Z(F) \leq (\text{resp. } <) \phi_Z(E)$$

が成り立つとき, E は Z -半安定 (resp. 安定) であるという.

3. 以下の条件を満たすとき, Z は **Harder-Narasimhan(HN)** 条件をみたすという. : 任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して, 有限のフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = E$$

であって, すべての $i = 1, \dots, n$ に対して $F_i := E_i/E_{i-1}$ は Z -半安定であり,

$$\phi_Z(E_1) > \cdots > \phi_Z(E_n)$$

を満たすようなものが存在する.

例 2.2. X を滑らかな射影的代数曲線とし, $\mathcal{A} = \text{Coh}(X)$ とする.

$$Z := -\deg + i \text{rk}$$

と定義すると, Z は $\text{Coh}(X)$ 上の安定関数である. この場合 Z -安定性は, Mumford のスロープ安定性に他ならない. Z が HN 条件を満たすことは, 古典的に知られている.

次に, \mathfrak{t} -構造の核の概念を述べよう.

定義 2.3. \mathcal{D} を三角圏とする. \mathcal{D} 上の \mathfrak{t} -構造の核とは, \mathcal{D} 内の充満加法圏 $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ であって, 以下の条件を満たすもののことである: 任意の $E \in \mathcal{D}$ に対して, 整数の列 $k_1 > \dots > k_n$ と \mathcal{D} 上の完全三角列

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = E_0 & \xrightarrow{\quad} & E_1 & \xrightarrow{\quad} & E_2 & \xrightarrow{\quad} & \dots \xrightarrow{\quad} & E_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & E_n = E \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & A_1[k_1] & & A_2[k_2] & & & A_n[k_n] & &
 \end{array}$$

であって, $A_i \in \mathcal{A}$ を満たすものが存在する.

注意 2.4. \mathfrak{t} -構造の核はアーベル圏であることが知られている.

例 2.5. \mathcal{A} をアーベル圏とし, $\mathcal{D} = D^b(\mathcal{A})$ を \mathcal{A} の有界導来圏とする. この時, $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ は \mathcal{D} の \mathfrak{t} -構造の核である. 特に, $\text{Coh}(X)$ は $D^b(X)$ 上の \mathfrak{t} -構造の核である.

例 2.6. $f: X \rightarrow Y$ は代数多様体間の固有双有理射とし, 次の 2 条件を満たすとすると:

- $\mathbf{R}f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$.
- 任意の $y \in Y$ に対して, $\dim f^{-1}(y) \leq 1$.

例えば, X が滑らかな射影的曲面, f が (-2) 曲線の収縮射であるとき, これらの仮定は満たされる. このとき, 以下の圏は $D^b(X)$ 上の \mathfrak{t} -構造の核であることが知られている [2, 10].

$$\text{Per}(X/Y) := \left\{ E \in D^b(X) : \begin{array}{l} f_*\mathcal{H}^{-1}(E) = 0, \\ \mathbf{R}^1f_*\mathcal{H}^0(E) = 0, \text{Hom}(\mathcal{H}^0(E), \mathcal{C}) = 0 \end{array} \right\}.$$

ここで, $\mathcal{C} := \{E \in \text{Coh}(X) : \mathbf{R}f_*E = 0\}$ である.

上記の例のように, $D^b(X)$ 上には, $\text{Coh}(X)$ 以外にも \mathfrak{t} -構造の核が存在する. そのようなアーベル圏上にも安定関数を考えることができる点が, 導来圏を用いる一つのメリットである.

以上の準備の下, 三角圏上の安定性条件の定義を述べることができる.

定義 2.7. \mathcal{D} を三角圏とする. \mathcal{D} 上の安定性条件とは, \mathcal{D} 上の \mathfrak{t} -構造の核 \mathcal{A} と, HN 条件を満たす \mathcal{A} 上の安定関数 Z の組 (Z, \mathcal{A}) のことである. Z は中心電荷と呼ばれる.

例 2.8. X を滑らかな射影的代数曲線とする. Z を例 2.2 のように定めると, 組 $(Z, \text{Coh}(X))$ は $D^b(X)$ 上の安定性条件である.

上記の例が示すように, 三角圏上の安定性条件は曲線上の Mumford スロープ安定性の一般化になっている.

2.2 台条件と安定性条件の空間

この節では、「安定性条件全体のなす集合は複素多様体の構造を持つ。」という Bridgeland の結果を紹介する。

\mathcal{D} を三角圏として、有限生成アーベル群 Γ と群準同型 $\text{cl}: K(\mathcal{D}) \rightarrow \Gamma$ を固定する。

定義 2.9. $\sigma = (Z, \mathcal{A})$ を \mathcal{D} 上の安定性条件とし、 Z は cl を factor すると仮定する。この時、 σ が (Γ, cl) に関して台条件を満たすとは、以下が成り立つことをいう。

$$\sup \left\{ \frac{\|\text{cl}(E)\|}{|Z(E)|} : E \in \mathcal{A} \text{ は } Z\text{-半安定} \right\} < +\infty.$$

ここで $\|\cdot\|$ は、 $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 上のノルムを表す。

(Γ, cl) に関して台条件を満たす \mathcal{D} 上の安定性条件の集合を $\text{Stab}_{\Gamma}(\mathcal{D})$ で表す。台条件は、中心電荷に沿った安定性条件の変形の存在を保証する条件である：

定理 2.10 ([3]). $\text{Stab}_{\Gamma}(\mathcal{D})$ 上にある位相空間の構造が存在して、

$$\text{Stab}_{\Gamma}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}), (Z, \mathcal{A}) \mapsto Z$$

は局所同相写像になる。特に $\text{Stab}_{\Gamma}(\mathcal{D})$ は複素多様体である。

以下、代数多様体 X に対しては、 $\text{Stab}(X) := \text{Stab}_{\mathcal{N}(X)}(D^b(X))$ という記号を用いる。ただし $\mathcal{N}(X) := K(X)/\text{Ker } \chi$ と定義し、 X の **numerical Grothendieck 群** とよぶ。

3 主定理 A

本章では、以下の主定理 A について解説する：

定理 3.1 (主定理 A). X を射影的曲面とし、 $C \subset X$ を (-2) 曲線とする。また、 $f: X \rightarrow Y$ を C を A_1 型特異点へと収縮する双有理射とする。このとき、 X 上の安定性条件の 1 パラメータ族 $\{\sigma_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在して、以下を満たす：

1. $t < 0$ のとき、 X はチャーン指標 $\text{ch}(\mathcal{O}_x)$ を持つ σ_t -安定対象の良モジュライである。
2. $t = 0$ のとき、 Y はチャーン指標 $\text{ch}(\mathcal{O}_x)$ を持つ σ_0 -半安定対象の粗モジュライである。
3. $t > 0$ のとき、 X はチャーン指標 $\text{ch}(\mathcal{O}_x)$ を持つ σ_t -安定対象の良モジュライである。

注意 3.2. 上記の定理において、 $t < 0$ のときと $t > 0$ のときの安定性条件は本質的に異なるものである。実際、それぞれの σ_t -安定対象の集合は、 $D^b(X)$ の非自明な自己同値でうつりあう。

以降この章では、 X, Y, C, f は定理のとおりとする。まず A_1 型特異点を持つ曲面の例を挙げよう。

例 3.3. 1. Hirzebruch 曲面。

n は自然数とする。 \mathbb{P}^1 上の \mathbb{P}^1 束 $X = \mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$ を考える。全射

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$$

から定まる切断 $C \subset X$ は $(-n)$ 曲線である。特に、 \mathbb{F}_2 は (-2) 曲線を含む。

2. Kummer 曲面.

A をアーベル曲面とする. A 上の (-1) 倍写像を $\iota: A \rightarrow A$ と表す. すると ι は 16 個の固定点を持つので, 商多様体 $Y = A/\langle \iota \rangle$ は 16 個の A_1 型特異点を持つ. Y の 16 点の特異点での爆発 $X \rightarrow Y$ は K3 曲面であり, 例外集合として 16 個の (-2) 曲線を含む.

主定理 A の証明の流れは以下のとおりである.

- まず, 収縮射 f の情報を持つ安定性条件 σ_0 を構成する (3.1 節).
- σ_0 の台条件により, 定理 2.10 を用いて σ_0 の変形 $\{\sigma_t\}_{t \in (0,1)}$ を得る. これが定理に現れる 1 パラメータ族である.
- 最後にチャーン指標 $\text{ch}(\mathcal{O}_x)$ を持つ σ_t -半安定対象のモジュライ空間を決定して, 定理の証明が完了する (3.2 節).

3.1 安定性条件の構成

この節では σ_0 を構成する. まず, Y 上の豊富因子 $\omega \in \text{Amp}(Y)$ と, \mathbb{Q} -因子 $\beta \in \text{NS}(Y)_{\mathbb{Q}}$ をとる. 物理学からの要請により, 次の形の中心電荷を持つ安定性条件の存在が期待される:

$$Z_{f^*\omega, \beta} := - \int_X e^{-if^*\omega} \cdot \text{ch}^\beta.$$

ただし ch^β は, $\text{ch}^\beta := e^{-\beta} \cdot \text{ch}$ で定義される. この中心電荷は Y 上の豊富因子を用いて定義されており, 収縮射 f の情報を持っている.

$Z_{f^*\omega, \beta}$ を安定関数に持つような t -構造の核を, 以下で構成する. まず例 2.6 の t -構造の核 $\text{Per}(X/Y)$ を思い出そう. これは f を用いて定義されており, 収縮射の情報を持つと期待できる. しかし, $Z_{f^*\omega, \beta}$ は $\text{Per}(X/Y)$ 上の安定関数とはならない.

例 3.4. 例えば, M を $\omega \cdot \text{ch}_1(M) < f^*\omega \cdot \beta$ となるような Y 上のベクトル束とする. このとき, $E := f^*M$ は $\text{Per}(X/Y)$ の対象であるが, 中心電荷の像の虚部は

$$\Im Z_{f^*\omega, \beta}(E) = \omega \cdot \text{ch}_1(M) - f^*\omega \cdot \beta < 0$$

となり, $Z_{f^*\omega, \beta}$ は安定関数の定義を満たさない.

したがって, $\text{Per}(X/Y)$ を適切に修正して, 新たな t -構造の核を構成する必要がある. そのために, 次のスロープ関数を考える:

$$\mu_{f^*\omega, \beta} := \frac{f^*\omega \cdot \text{ch}_1^\beta}{\text{ch}_0}: \text{Per}(X/Y) \rightarrow (-\infty, +\infty].$$

すると, $\text{Coh}(X)$ 上の Mumford スロープ安定性と同様にして, $\text{Per}(X/Y)$ 上に $\mu_{f^*\omega, \beta}$ -安定性の概念が定まる. 次に, $\text{Per}(X/Y)$ の二つの部分圏を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f^*\omega, \beta} &:= \langle T \in \text{Per}(X) : T \text{ は } \mu_{f^*\omega, \beta}\text{-半安定で } \mu_{f^*\omega, \beta}(T) > 0 \rangle, \\ \mathcal{F}_{f^*\omega, \beta} &:= \langle F \in \text{Per}(X/Y) : F \text{ は } \mu_{f^*\omega, \beta}\text{-半安定で } \mu_{f^*\omega, \beta}(F) \leq 0 \rangle. \end{aligned}$$

ここで $\langle S \rangle$ は, S の拡大閉包を表す. このとき組 $(\mathcal{T}_{f^*\omega, \beta}, \mathcal{F}_{f^*\omega, \beta})$ は, $\text{Per}(X/Y)$ 上の振れ対と呼ばれるものになっている. 一般に, t -構造の核上に振れ対があると, 新たな t -構造の核が定義できる. すなわち,

$$\mathcal{B}_{f^*\omega, \beta} := \left\{ E \in \text{Per}(X/Y) : \begin{array}{l} \mathcal{H}_p^{-1}(E) \in \mathcal{F}_{f^*\omega, \beta}, \mathcal{H}_p^0(E) \in \mathcal{T}_{f^*\omega, \beta}, \\ \mathcal{H}_p^i(E) = 0 \text{ for } i \neq -1, 0 \end{array} \right\}$$

は $D^b(X)$ 上の t -構造の核である。これが求める核である:

定理 3.5. \mathbb{Q} -因子 β は, $0 < C, \beta < 1$ を満たすとする。このとき, 組 $\sigma_0 := (Z_{f^*\omega, \beta}, \mathcal{B}_{f^*\omega, \beta})$ は X 上の安定性条件であり, 台条件を満たす。

定理 3.5 の証明の鍵となるのは, 次の Bogomolov-Gieseker 型の不等式である。

命題 3.6. $\text{ch}_0^\beta(E) > 0$ を満たす任意の $\mu_{f^*\omega, \beta}$ -半安定対象 $E \in \text{Per}(X/Y)$ に対して, 不等式

$$\text{ch}_1^\beta(E)^2 - 2 \text{ch}_0^\beta(E) \text{ch}_2^\beta(E) \geq 0$$

が成立する。

上の命題は, 以下の古典的な Bogomolov-Gieseker 不等式の類似である:

定理 3.7. 任意のスロープ半安定な振れのない層 $E \in \text{Coh}(X)$ は, 不等式

$$\text{ch}_1(E)^2 - 2 \text{ch}_0(E) \text{ch}_2(E) \geq 0$$

を満たす。

命題 3.6 を用いることで, 半正値性

$$Z_{f^*\omega, \beta}(\mathcal{B}_{f^*\omega, \beta} \setminus \{0\}) \subset \mathcal{H} \tag{1}$$

および台条件が示される。

定理 3.5 の証明のスケッチ。例えば, (1) を示すのにどのように Bogomolov-Gieseker 型不等式が使われるのか見てみよう。最も非自明なのは, $\mu_{f^*\omega, \beta}(E) = 0$ を満たす $\mu_{f^*\omega, \beta}$ -半安定対象 $E \in \text{Per}(X/Y)$ に対して,

$$Z_{f^*\omega, \beta}(E[1]) < 0 \tag{2}$$

を示すことである。まず定義により,

$$Z_{f^*\omega, \beta}(E[1]) = \text{ch}_2^\beta(E) - \frac{\omega^2}{2} \text{ch}_0^\beta(E)$$

を得る。ここで, Bogomolov-Gieseker 不等式 (命題 3.6) により,

$$\text{ch}_2^\beta(E) - \frac{\omega^2}{2} \text{ch}_0^\beta(E) \leq \frac{\text{ch}_1^\beta(E)^2}{2 \text{ch}_0^\beta(E)} - \frac{\omega^2}{2} \text{ch}_0^\beta(E)$$

が成立する。さらに, $\mu_{f^*\omega, \beta}(E) = 0$ という仮定により, Hodge の指数定理を用いて,

$$\text{ch}_1^\beta(E)^2 < 0$$

である。以上をまとめて, 求める不等式 (2) を得る。 □

3.2 モジュライ問題

σ_0 の台条件により, 中心電荷 $Z_{\beta, f^*\omega}$ の変形

$$Z_{\beta, f^*\omega + t\epsilon C} := - \int_X e^{-if^*\omega + t\epsilon C} \cdot \text{ch}^\beta$$

に沿って, 安定性条件 σ_0 の変形 $\sigma_t = (Z_{\beta, f^*\omega + t\epsilon C}, \mathcal{B}_t)$ が存在する. ただし, $t \in (0, 1), 0 < \epsilon \ll 1$ である. この 1 パラメータ族を用いて, 定理 3.1 の証明の概略を述べる.

定理 3.1 の証明の概略. ここでは集合論的にモジュライ空間を決定しよう.

まず $t = 0$ の場合, つまり σ_0 -半安定対象の集合を考える. 論文 [10] において,

$$\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C(-1)[1], \mathcal{O}_x \ (x \in X \setminus C)$$

は $\text{Per}(X/Y)$ の単純対象であることが示されている. さらにこれらは $\mu_{f^*\omega, \beta} = +\infty$ を満たすので, $\mathcal{B}_{f^*\omega, \beta}$ の σ_0 -安定対象である. よって次のことが分かった.

1. $x \in X \setminus C$ のとき, \mathcal{O}_x は σ_0 -安定.
2. $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(-1)[1]$ は σ_0 -半安定であるが, 安定ではない.
3. $x \in C$ のとき, \mathcal{O}_x は σ_0 -半安定であるが, 安定ではない.
4. 非自明な拡大

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-1)[1] \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

を考えると, E は σ_0 -半安定であるが, 安定ではない. このような E は $\mathbb{P}(\text{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C(-1)[1])) \cong \mathbb{P}^1$ でパラメータづけられる.

実はチャーン指標が $\text{ch}(\mathcal{O}_x)$ と一致するような σ_0 -半安定対象は, 上記のものに限られることもわかる. 3, 4 の対象はすべて, 同一の σ_0 -安定対象 \mathcal{O}_C と $\mathcal{O}_C(-1)[1]$ の拡大として得られる. このような対象たちは **S 同値** であると呼ばれ, モジュライ空間の中では同一視される. したがって σ_0 -半安定対象の S 同値類の集合は, Y の閉点の集合と一対一に対応する.

$t \neq 0$ のときの安定対象の集合は, **Wall-Chamber 構造** と呼ばれる $\text{Stab}(X)$ 上の構造により, 以下のようになる.

	$t < 0$	$t = 0$	$t > 0$
1	σ_t -安定	σ_0 -安定	σ_t -安定
2	σ_t -半安定でない	σ_0 -半安定	σ_t -半安定でない
3	σ_t -安定	σ_0 -半安定	σ_t -半安定でない
4	σ_t -半安定でない	σ_0 -半安定	σ_t -安定

とくに, $t \neq 0$ のときは, σ_t -安定対象の集合は, X の閉点の集合と一対一に対応している. □

4 主定理 B

Y は商特異点のみを持つ射影的代数曲面とし, $f: X \rightarrow Y$ を極小特異点解消とする. また, \mathcal{Y} を Y に付随する Deligne-Mumford スタックとする. この時, 圏論的には Y の smooth モデルとして $D^b(\mathcal{Y})$ を考えると都合がよい. Y 自身は特異点を持つため $D^b(Y)$ を扱うのが困難であるのに対して, スタック \mathcal{Y} は滑らかであり, $D^b(\mathcal{Y})$ が良いふるまいをするからである. 次が主定理 B である.

定理 4.1 (主定理 B). Y を商特異点のみを持つ射影的曲面とし, \mathcal{Y} を Y に付随するスタックとする. このとき, $D^b(\mathcal{Y})$ 上の安定性条件 σ と, numerical class $v \in \mathcal{N}(\mathcal{Y})$ が存在して, numerical class v を持つような σ -安定対象の良モジュライ空間は Y の極小特異点解消となる.

定理 4.1 の証明の鍵となるのは, 導来マックイ対応である [6, 7]. 導来マックイ対応について述べるために, 半直交分解について復習しよう.

定義 4.2. \mathcal{D} を三角圏とする.

1. $E_1, \dots, E_l \in \mathcal{D}$ が例外列であるとは, 以下の条件を満たすことをいう:

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_j[p]) = \begin{cases} \mathbb{C} & (i = j \text{ かつ } p = 0) \\ 0 & (i > j \text{ または, } i = j \text{ かつ } p \neq 0). \end{cases}$$

2. $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}$ ($i = 1, \dots, l$) を \mathcal{D} の充満加法部分圏とする. この時, $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_l$ が半直交列であるとは, $i > j$ に対して,

$$\mathcal{D}_j \subset \mathcal{D}_i^\perp$$

が成り立つことである. ただし,

$$\mathcal{D}_i^\perp := \{E \in \mathcal{D} : \mathrm{Hom}(F, E) = 0, F \in \mathcal{D}_i\}$$

と定義する. さらに半直交列 $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_l$ が \mathcal{D} を生成するとき, 半直交分解であるといい,

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_l \rangle$$

と表す.

導来マックイ対応は, Y の二つの smooth モデル X と \mathcal{Y} の導来圏を比較する定理である:

定理 4.3 ([6, 7]). 充満忠実関手 $\Phi: D^b(X) \rightarrow D^b(\mathcal{Y})$ と例外列 $E_1, \dots, E_l \in D^b(\mathcal{Y})$ が存在して,

$$D^b(\mathcal{Y}) = \langle \Phi(D^b(X)), E_1, \dots, E_l \rangle$$

は半直交分解となる.

以降 numerical class として, $v := [\Phi(\mathcal{O}_x)]$ ($x \in X$) を固定する. 定理 4.1 における安定性条件 σ は, 導来マックイ対応の半直交分解を用いて構成される.

定理 4.1 の証明のアイデア. 一般に三角圏 \mathcal{D} の半直交分解が与えられたとき, 各半直交成分上の安定性条件を貼り合わせて \mathcal{D} 上の安定性条件を構成する方法が知られている [5]. そこで, $D^b(X)$ と $\langle E_1, \dots, E_l \rangle$ 上の安定性条件を適切に定義して, それらを貼り合わせることで $D^b(\mathcal{Y})$ 上に求める安定性条件を構成する.

まず $D^b(X)$ 上には, チャーン指標 $\text{ch}(\mathcal{O}_x)$ を持つ安定対象のモジュライが X であるような安定性条件 τ の存在が知られている [4, 1]. 構成は第 2 章の σ_0 の構成と非常に似ている.

一方で $\langle E_1, \dots, E_l \rangle$ は有限個の対象で生成されているため, 比較的容易に安定性条件 ρ を構成することができる. あとは τ -安定性に影響を及ぼさないように τ と ρ を貼り合わせれば, 求める安定性条件 σ を得る. □

参考文献

- [1] Daniele Arcara and Aaron Bertram. Bridgeland-stable moduli spaces for K -trivial surfaces. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 15(1):1–38, 2013. With an appendix by Max Lieblich.
- [2] Tom Bridgeland. Flops and derived categories. *Invent. Math.*, 147(3):613–632, 2002.
- [3] Tom Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math. (2)*, 166(2):317–345, 2007.
- [4] Tom Bridgeland. Stability conditions on $K3$ surfaces. *Duke Math. J.*, 141(2):241–291, 2008.
- [5] John Collins and Alexander Polishchuk. Gluing stability conditions. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 14(2):563–607, 2010.
- [6] Akira Ishii and Kazushi Ueda. The special McKay correspondence and exceptional collections. *Tohoku Math. J. (2)*, 67(4):585–609, 2015.
- [7] Yujiro Kawamata. Derived categories of toric varieties III. *Eur. J. Math.*, 2(1):196–207, 2016.
- [8] Yukinobu Toda. Stability conditions and extremal contractions. *Math. Ann.*, 357(2):631–685, 2013.
- [9] Yukinobu Toda. Stability conditions and birational geometry of projective surfaces. *Compos. Math.*, 150(10):1755–1788, 2014.
- [10] Michel Van den Bergh. Three-dimensional flops and noncommutative rings. *Duke Math. J.*, 122(3):423–455, 2004.