

代数曲線の関数体を係数体とする曲線の トロピカル化の種数について

伊藤 孝明 (Ito Takaaki)

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 博士後期課程 3年

概要

付値体上の代数多様体 X に対し、付値の像を考えることにより、 X のトロピカル化 $trop(X)$ が得られる。今回は、代数曲線 C の関数体 $K(C)$ を係数体として考える。 $K(C)$ は C の各点に応じた付値を持つので、 C の各点に応じたトロピカル化が考えられる。一般に、 $K(C)$ 上の代数曲線 X をトロピカル化すると種数は保たれない。ここで、トロピカル曲線の種数はその1次ベッチ数として定義する。本講演では、 X が楕円曲線の場合、緩い仮定のもとでは、 C のある点に対応するトロピカル化により、 X の種数と $trop(X)$ の種数が一致することを示す。

1 トロピカル幾何

トロピカル多様体についての基本事項を述べる。詳細は、例えば [1] を参照。ただし、議論のし易さのため、[1] とは異なる設定をしている部分がある。

1.1 トロピカル多様体

K を体とし、写像 $v: K \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ が以下を満たしているとする。

- (1) $v(a) = -\infty \Leftrightarrow a = 0$,
- (2) $v(ab) = v(a) + v(b)$,
- (3) $v(a + b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$.

v の代わりに $-v$ を考えれば通常の加法付値となるが、後の議論のため、 v をこのように定めることにする。

例 1.1. 1変数有理関数体 $\mathbb{C}(x)$ において、 $v\left(\frac{f}{g}\right) = \deg(f) - \deg(g)$ (ただし $v(0) = -\infty$) と定めると、 v は上の条件を満たす。

補題 1.2. $a, b \in K$ に対し、次が成り立つ。

- (1) $v(1) = v(-1) = 0$
- (2) $v(-a) = v(a)$
- (3) $v(a) < v(b)$ ならば $v(a + b) = v(b)$.

Proof. (1) $v(1) = v(1^2) = 2v(1)$ より $v(1) = 0$. また、 $0 = v(1) = v((-1)^2) = 2v(-1)$ より $v(-1) = 0$.

(2) $v(-a) = v(-1) + v(a) = v(a)$.

(3) $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\} = v(b)$ である. 一方, $v(b) = v(a+b-a) \leq \max\{v(a+b), v(-a)\} = \max\{v(a+b), v(a)\}$. よって, $v(b) \leq v(a+b), v(b) \leq v(a)$ のいずれかが成り立つが, 後者は仮定に反する. したがって $v(b) \leq v(a+b)$, したがって $v(a+b) = v(b)$.

□

$(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ に対し $(v(a_1), \dots, v(a_n)) \in \overline{\mathbb{R}}^n$ を定める写像も, 同じ v で表すことにする.

$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}} \in K[x_1, \dots, x_n]$ を 0 でない多項式とし, $V(f) := \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0\}$, $(a_1, \dots, a_n) \in V(f)$ とする. このとき, $f(a_1, \dots, a_n)$ の各項の付値 $(v(c_{\mathbf{u}} a^{\mathbf{u}}))_{\mathbf{u}} = (v(c_{\mathbf{u}}) + \sum_{i=1}^n u_i v(a_i))_{\mathbf{u}}$ のうち, もしいずれか一つ $v(c_{\mathbf{u}_0} a^{\mathbf{u}_0})$ のみが最大であれば, 補題 1.2(3) より, $v(f(a_1, \dots, a_n)) = v(c_{\mathbf{u}_0} a^{\mathbf{u}_0}) \neq -\infty$ となり矛盾. したがって, 次を得る.

$$v(V(f)) \subset \left\{ (w_1, \dots, w_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n \mid \max_{\mathbf{u}} \left(v(c_{\mathbf{u}}) + \sum_{i=1}^n u_i w_i \right) \text{ は少なくとも二項で最大値をとる} \right\}$$

定義 1.3. 0 でない多項式 $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}} \in K[x_1, \dots, x_n]$ に付随するトロピカル (アフィン) 多様体 $\text{trop}(V(f)) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ を,

$$\text{trop}(V(f)) = \left\{ (w_1, \dots, w_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n \mid \max_{\mathbf{u}} \left(v(c_{\mathbf{u}}) + \sum_{i=1}^n u_i w_i \right) \text{ は少なくとも二項で最大値をとる} \right\}$$

で定義する.

注意 1.4. K が代数閉体の場合, $\text{trop}(V(f))$ は $v(V(f))$ の閉包と一致する (Kapranov の定理. [1] Theorem 3.1.3).

例 1.5. $f(x, y) = x + y + 1$ とする. $\text{trop}(V(f))$ は, $w_1, w_2, 0$ のうち少なくとも2つが最大値をとるような $(w_1, w_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ 全体の集合である.

- w_1, w_2 が最大となる点の集合は $e_1 := \{(w, w) \in \overline{\mathbb{R}}^2 \mid w \geq 0\}$,
- $w_1, 0$ が最大となる点の集合は $e_2 := \{(0, w_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2 \mid w_2 \leq 0\}$,
- $w_2, 0$ が最大となる点の集合は $e_3 := \{(w_1, 0) \in \overline{\mathbb{R}}^2 \mid w_1 \leq 0\}$.

よって, $\text{trop}(V(f)) = e_1 \cup e_2 \cup e_3$ となる (図 1 参照).

0 でない多項式 $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ に対し, $\text{trop}(V(f)) \cap \mathbb{R}^n$ は純 $n-1$ 次元多面体複体の構造を持つことが知られている ([1] Proposition 3.1.6). たとえば例 1.5 の場合, 1 次元面が e_1, e_2, e_3 , 0 次元面が原点のみという純 1 次元多面体複体となっている.

1.2 トロピカル射影多様体

前節の事柄について, その射影化を考えることができる.

定義 1.6. (トロピカル射影空間) n 次元トロピカル射影空間 TP^n を

$$\text{TP}^n := (\overline{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim,$$

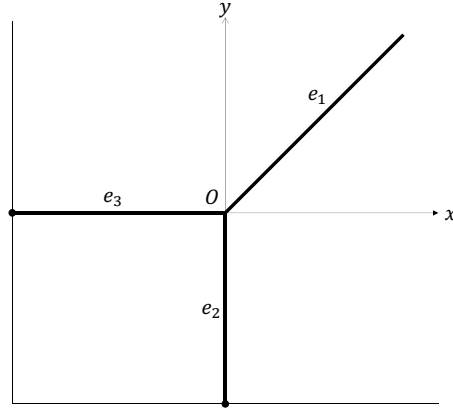


図 1: $x + y + 1$ に付随するトロピカル多様体

ここで,

$$(v_0, \dots, v_n) \sim (w_0, \dots, w_n) \Leftrightarrow \text{ある } \lambda \in \mathbb{R} \text{ が存在して } w_i = v_i + \lambda, i = 0, \dots, n,$$

によって定める. (w_0, \dots, w_n) を含む同値類を $[w_0 : \dots : w_n]$ で表す.

K 上の n 次元射影空間を \mathbb{P}_K^n とするとき, 写像 $v: \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{TP}^n$ が $v([a_0 : \dots : a_n]) = [v(a_0) : \dots : v(a_n)]$ によって定まる.

$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}} \in K[x_0, \dots, x_n]$ を 0 でない斉次多項式とし, $V(f) := \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}_K^n \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0\}$ とすると, 前節と同様に

$$v(V(f)) \subset \left\{ [w_0 : \dots : w_n] \in \mathbb{TP}^n \mid \max_{\mathbf{u}} \left(v(c_{\mathbf{u}}) + \sum_{i=0}^n u_i w_i \right) \text{ は少なくとも二項で最大値をとる} \right\}$$

が成り立つ.

定義 1.7. 0 でない斉次多項式 $f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}} \in K[x_0, \dots, x_n]$ に付随するトロピカル射影多様体 $\text{trop}(V(f)) \subset \mathbb{TP}^n$ を,

$$\text{trop}(V(f)) = \left\{ [w_0 : \dots : w_n] \in \mathbb{TP}^n \mid \max_{\mathbf{u}} \left(v(c_{\mathbf{u}}) + \sum_{i=0}^n u_i w_i \right) \text{ は少なくとも二項で最大値をとる} \right\}$$

で定義する.

$X \subset \mathbb{P}_K^n$ を余次元 1 の閉部分多様体とすると, X はある斉次多項式 $f(x_0, \dots, x_n) \in K[x_0, \dots, x_n]$ によって定義される. このとき, $\text{trop}(V(f))$ を $\text{trop}(X)$ と書き, X のトロピカル化と呼ぶ.

1.3 Newton 多面体

与えられた多項式に対してそのトロピカル多様体を得るには, Newton 多面体を用いると便利である. 以下, アフィン多様体の状況で記述するが, 射影多様体の場合もまったく同様である.

定義 1.8. 0 でない多項式 $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}} \in K[x_1, \dots, x_n]$ に対し,

$$\text{Newt}(f) := \text{conv}\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid c_{\mathbf{u}} \neq 0\} \quad (\text{すなわち } \{\mathbf{u} \mid c_{\mathbf{u}} \neq 0\} \text{ を含む最小の凸集合}),$$

と定め, f の Newton 多面体と呼ぶ.

$\text{Newt}(f)$ には, f から自然に定まる細分が入る.

定義 1.9. f を上と同じものとし, \mathbb{R}^{n+1} の凸多面体

$$P := \text{conv}\{(\mathbf{u}, v(c_{\mathbf{u}})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid c_{\mathbf{u}} \neq 0\}$$

を考える. P の upper face とは, P の面で, P の内部に向かう任意の法線ベクトルの第 $n+1$ 成分が負であるもののことである. P の upper face を $\text{Newt}(f)$ に射影したものの全体は, P を台とする多面体複体を成す. これを $\text{Newt}(f)$ の regular subdivision という.

以下, $\text{Newt}(f)$ には regular subdivision が入っているとす.

トロピカル多様体とニュートン多面体は, 次のように双対関係にあることが知られている.

命題 1.10. ([1] Proposition 3.1.6) 0 でない多項式 $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ に対し, $\text{Newt}(f)$ の k 次元面 ($k = 1, \dots, n$) と $\text{trop}(V(f)) \cap \mathbb{R}^n$ の $n-k$ 次元面の間に 1 対 1 対応が存在して, 包含関係を逆転する対応となる. さらに, 対応する面は互いに直交する.

例 1.11. (1) $f(x, y) = x + y + 1$ とする. $\text{Newt}(f) = \text{conv}\{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ であり, regular subdivision には非自明な分割は現れない. 例 1.5 の $\text{trop}(V(f))$ との対応は 図 3 のようになっている. 三角形の各辺 (1 次元面) が $\text{trop}(V(f))$ の e_1, e_2, e_3 と対応し, 三角形そのもの (2 次元面) が $\text{trop}(V(f))$ の原点に対応する.

(2) $f(x, y) = x^2y + xy^2 + txy + 1$ とする. ただし, $v(t) = 1$ とする. $\text{Newt}(f) = \text{conv}\{(2, 1), (1, 2), (1, 1), (0, 0)\}$ であり, regular subdivision は 図 4 のようになる. $\text{Newt}(f)$ の双対を考えれば, $\text{trop}(V(f))$ が 図 5 のような形であることが分かる.

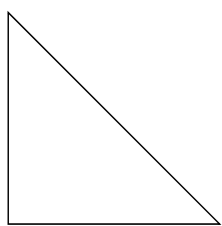


図 2. $\text{Newt}(x + y + 1)$

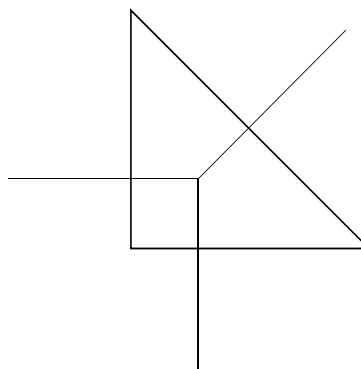


図 3. $\text{Newt}(x + y + 1)$ と $\text{trop}(V(x + y + 1))$

注意 1.12. $\text{Newt}(f)$ の 0 次元面は, $\text{trop}(V(f)) \cap \mathbb{R}^n$ によって分割される $\mathbb{R}^n \setminus \text{trop}(V(f))$ の各領域に対応する.

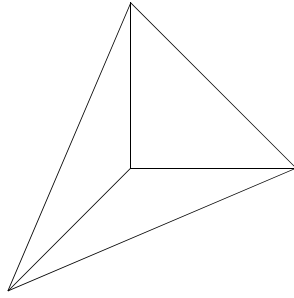


図 4. $\text{Newt}(x^2y + xy^2 + txy + 1)$

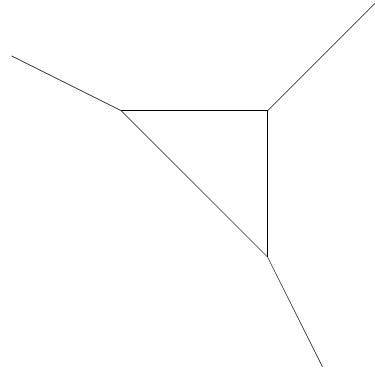


図 5. $\text{trop}(V(x^2y + xy^2 + txy + 1))$

1.4 種数

この節では, f は 3 変数斉次多項式, したがって, $\text{trop}(V(f))$ は 1 次元トロピカル射影多様体 とする.

定義 1.13. 1 次元トロピカル射影多様体 $\text{trop}(V(f))$ の種数を, $\Gamma := \text{trop}(V(f)) \cap \mathbb{R}^2$ の位相空間としての 1 次ベッチ数 $b_1(\Gamma) = \text{rank}(H_1(\Gamma))$ として定義する.

種数は Γ の”ループの数”を表している. 対応する Newton 多面体においては, 種数は regular subdivision の分岐点として現れる内点の個数に等しい.

種数はトロピカル化によって保たれるとは限らないことが知られている. 例えば, 楕円曲線 $V(x^3 + xz^2 + z^3 - y^2z) \subset \mathbb{P}_K^2$ の種数は 1 であることが知られているが, そのトロピカル化の種数は 0 である. 一方, 例 1.11(2) の多項式 (の射影化) $f(x, y) = x^2y + xy^2 + txyz + z^3$ の表す曲線は同じく楕円曲線で種数 1 となるが, この場合は種数が保たれている.

2 代数曲線の関数体

C をコンパクト Riemann 面, すなわち, コンパクトな 1 次元複素多様体とする. C 上の有理型関数の全体は体を成す. これを関数体と言い, $K(C)$ と書く.

補題 2.1. 与えられた体があるコンパクト Riemann 面の関数体となるための必要十分条件は, その体が \mathbb{C} 上の代数関数体, すなわち \mathbb{C} 上の超越次元 1 の体であることである.

系 2.2. $K(C)$ の有限次拡大体は, C を被覆するあるコンパクト Riemann 面 C' の関数体 $K(C')$ に同型である.

点 $p \in C$ と関数 $f \in K(C)$ に対し, f が点 p に n 位の極 (resp. 零点) を持つとき, $v_p(f) = n$ (resp. $v_p(f) = -n$) と書く. $v_p(0) = -\infty$ と定めると, 写像 $v_p: K(C) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は 1.1 節の v の公理を満たす.

次の結果はよく知られている.

補題 2.3. ([3] など) 任意の $f \in K(C)$ に対し, $\sum_{p \in C} v_p(f) = 0$.

3 主結果

1.4 節において、トロピカル化が必ずしも種数を保たないことを見たが、ここで、 $C, K(C)$ を 2 章と同様とすると、 $K(C)$ は無数の付値を持つ。そこで、 $K(C)$ 上の曲線について、付値をいろいろ動かすことでトロピカル化により種数を保つことはできないか考えた。これが今回の研究テーマである。

この問題について、次の結果を得た。

Theorem 3.1. X を $K(C)$ 上の楕円曲線、すなわち、種数 1 の非特異射影曲線とし、 X の j -不変量 $j(X)$ が定数でないことを仮定する。このとき、 C を被覆するあるコンパクト Riemann 面 C' が存在して、 X を $K(C')$ 上に係数拡大して \tilde{X} としたとき、ある埋め込み $\tilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_{K(C')}^2$ と点 $p \in C'$ が存在して、 v_p についてのトロピカル化 $\text{trop}(\tilde{X})$ の種数は 1 となる。

j -不変量については [3] を参照。ここでは、後に補題 3.3 で述べる性質のみを用いる。

補題 3.2. ([2]) 標数 0 の代数閉体 Ω 上の任意の楕円曲線は、

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\lambda xyz = 0, \quad \lambda \in \Omega$$

の形の方程式で定義される楕円曲線に同型である。これを *Hessian form* という。

補題 3.3. 上の補題の記号で、*Hessian form* $x^3 + y^3 + z^3 - 3\lambda xyz = 0$ で定義される楕円曲線の j -不変量は、 $\frac{27\lambda^3(8+\lambda^3)^3}{(\lambda^3-1)^3}$ である。

定理 3.1 を証明する。 Ω を $K(C)$ の代数閉包とする。 X を Ω 上に係数拡大したものは、補題 3.2 より、*Hessian form*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\lambda xyz = 0, \quad \lambda \in \Omega$$

で表せる。 λ は $K(C)$ 上代数的なので、ある $K(C)$ 有限次拡大体に含まれる。補題 2.2 より、 C を被覆するあるコンパクト Riemann 面 C' が存在して、 $\lambda \in K(C')$ となる。すなわち、上の *Hessian form* は $K(C')$ 上の方程式となる。この式で定義される楕円曲線を $\tilde{X} \subset \mathbb{P}_{K(C')}^2$ とすれば、 \tilde{X} は X を $K(C')$ 上に係数拡大したものである。

λ が C' 上の関数として定数であると仮定すると、補題 3.3 より、 j -不変量も定数となり矛盾。よって、 λ は定数でない。したがって、補題 2.3 より、ある $p \in C'$ が存在して $v_p(\lambda) > 0$ となる。

この v_p によるトロピカル化を考えると、Newton 多面体とその regular subdivision は図 6 のようになり、したがって、 $\text{trop}(\tilde{X})$ は図 7 のようになり、種数 1 を持つ。

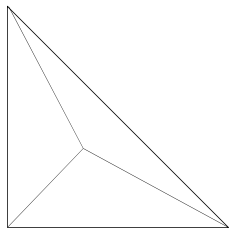


図 6

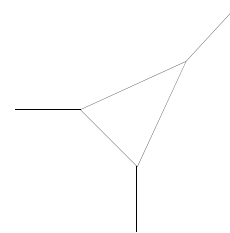


図 7. $\text{trop}(X)$

参考文献

- [1] D. Maclagan and B. Sturmfels, Introduction to Tropical Geometry, Graduate Studies in Mathematics, vol. 161, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [2] N. P. Smart, The Hessian Form of an Elliptic Curve. CHES' 2001, LNCS 2162, pp. 118–125, Springer-Verlag, 2001.
- [3] 堀川 顕示 著. 複素代数幾何学入門. 岩波書店, 1990.